興國高中 102 學年度第二學期高中數學科**議題融入教學 學習單**

班級：____________　　座號：__________　　姓名：____________________

一、圓錐曲線概說

數學小百科

高中數學第一冊，我們討論了一次函數及其相應的線性幾何，如直線、三角形、多邊形．為了描述生活中常遇到的自然或人文現象，我們也引進了二次函數或更高次的函數，甚至於指數函數、三角函數．如人口的成長，可用指數函數來描述，波動的現象可用三角函數描述．

利用二次函數可以描述在地面附近斜角向上或水平拋物的軌跡，它的圖形我們稱為拋物線．以拋物線的頂點為中心，將拋物線繞對稱軸旋轉一周，可掃出一個曲面，稱為拋物面．應用拋物面上的光學特性，可作「探照燈」及「天文望遠鏡」．將二次函數加以延伸，考慮更一般化的二元二次方程式，它可以描述更多的曲線，如橢圓、雙曲線，這些曲線讓我們描繪出大自然中，天體運動的軌跡及其他相關的現象．這些曲線的形狀可由一個圓錐面和一個平面的截痕而得，我們稱為圓錐曲線．下面就圓錐曲線發展史作個說明．

在前言與本章簡介中，我們已粗略的說明錐線的由來．圓錐曲線的研究，早在古希臘時代就有人為了「倍立方問題」引出了圓錐曲線的概念．到了西元前四百多年左右，梅納克門斯以幾何方法來探索「倍立方問題」，他利用頂角分別為直角、銳角、鈍角等三種不同的直圓錐面，與垂直於錐面的母線的平面截出了拋物線、橢圓與雙曲線等三種曲線（雙曲線只是一支）．梅氏為了將拋物線的概念與「倍立方問題」結合在一起，他曾推得一個拋物線的關係，以現代解析幾何的表達，那就是 $y^2=cx$ 的形式，其中 c 是與頂點到截平面的距離有關的常數．同樣的，對橢圓與雙曲線也作了深入的探討．

梅納克門斯之後，希臘數學家持續地作系統性的研究，其中歐基里德（Euclid，約 330～275B.C.），↓阿基米德（Archimedes，287～212B.C.），阿波羅尼斯等人都有很多的著作．阿基米德曾利用「窮盡法」計算出拋物線與直線圍成的弧形區域面積，並求得橢圓的面積，而阿波羅尼斯更完成了八卷關於圓錐曲線研究的著作．圓錐曲線的純幾何式研究，到阿波羅尼斯時代，可說是達到顛峰狀態．

Euclid↗

在阿波羅尼斯的著作中，他利用一個圓錐面與不同斜度的截平面截出了橢圓、拋物線與雙曲線，而且也確定雙曲線是兩支曲線的概念，三種曲線的命名也是由他最早提出的．在八卷著作中，阿波羅尼斯對切線與平行弦的中點軌跡都有詳細的介紹．他也得到橢圓和雙曲線的焦半徑性質，那就是：

「橢圓上任一點到兩焦點的距離和為一定值」 以及 「雙曲線上任一點到兩焦點距離差的絕對值是一定值」．

阿波羅尼斯更探索了橢圓與雙曲線的光學性質，但對於圓錐曲線的焦點、準線與離心率的研究，卻在阿波羅尼斯之後約西元三世紀左右，由幾何學家帕布斯（Pappus）提出來的．圓錐曲線的綜合幾何法研究，到此時已經相當完備了．直到十六、十七世紀後，由於解析幾何的引入，以及實際問題的需要，圓錐曲線的研究，再燃起新的熱潮．利用軌跡的概念，重新探討圓錐曲線與錐線的性質．

如：1579 年，蒙特將橢圓定義為：平面上到兩定點的距離和為一定值的點的軌跡．1604 年，克卜勒提出了連續變動的理論：他從一雙曲線開始，設它的兩焦點 F_1，F_2 在直線 ℓ 上，且 F_1 固定不動，F_2 沿著直線 ℓ 逐步的向遠處移動，這時候雙曲線的一支也隨著 F_2 的移動向遠處移動．當 F_2 移至無窮遠的地方，F_2 及一支曲線就消失了，這時雙曲線只剩一支，且開口也變小了，它變成了拋物線．當 F_2 從 F_1 的左側移到無窮遠處，而從 F_1 的右側又逐步的向 F_1 移動時，拋物線又變成了橢圓，又當 F_2 移到 F_1 的位置時，橢圓就變成圓的圖形．因此，就克卜勒的想法而言，圓錐曲線是一體的．事實上，克卜勒所提出的大膽想法，從圓錐與平面的截痕的觀點是可以理解的．從克卜勒提出的連續變動理論以及無窮遠點的概念之後，法國的射影幾何學家笛沙格（Desargues），巴斯卡（Blaise Pascal，1623～1662）以及海爾（Hire）也相繼的利用射影幾何學的觀點，對圓

笛沙格　　巴斯卡　　費馬

錐曲線作更進一步的研究．

當笛卡兒與費馬建立了解析幾何的概念和方法之後，他們也發現圓、橢圓、拋物線和雙曲線，它們的方程式都是二次式．但利用解析幾何（即坐標幾何）系統性的研究圓錐曲線是 1655 年後，英國的數學家瓦理斯（Wallis）導出圓錐曲線的方程式後，才利用方程式的方法證明圓錐曲線的各種性質．

二､圓錐曲線的參數式及其應用

1. 拋物線的參數式

性質(一)：拋物線 $y^2=4cx$ 上的動點 $P(x, y)$ 都可用 $(ct^2, 2ct)$，t 為實數表示．

反之，任一實數 t，點 $(ct^2, 2ct)$ 必在拋物線 $y^2=4cx$ 上，

我們稱 $\begin{cases} x=ct^2 \\ y=2ct \end{cases}$，$t$ 為實數，為拋物線 $y^2=4cx$ 的參數式．

例 1：求拋物線 $y^2=x$ 上距離點 $A(1, 0)$ 最近的點，並求此距離．

解

2. 橢圓的參數式

性質(二)：橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上的點 $P(x, y)$ 都可表成 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$，其中 $0\le\theta<2\pi$．反之，當 $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$，$0\le\theta<2\pi$，則點 P 必在橢圓上．

例 2：求橢圓 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上的點 $Q(x_0, y_0)$ 使它到直線 L：$x-2y-10=0$ 的距離最大，並求此最大距離．

解

各位同學，你的參與是使這個階段數學科議題融入課程實施成功的重要因素。請利用一些時間回答下列問題，一方面將最寶貴的意見提供給老師和學校，另一方面，也幫助自己了解自己的學習心得和表現一種方法。謝謝您的合作！

	極佳	佳	尚可	欠佳	極差
1. 本課程對你學習數學興趣的提升是否有幫助？	□	□	□	□	□
2. 本課程對你蒐集資料的能力是否有幫助？	□	□	□	□	□
3. 本課程對你學習數學內容的理解是否有幫助？	□	□	□	□	□
4. 本課程對你解決數學問題能時的提升是否有幫助？	□	□	□	□	□
5. 本課程對你與同學討論共同解決問題的能力是否有幫助？	□	□	□	□	□

6. 你對本課程的感想與建議：