投稿類別：數學

篇名：

在「熱」帶相遇「平均數」

作者：
林彥妘。觀音高中。高二6班
鄒羽寅。觀音高中。高二6班

指導老師：
顏玟檍老師

壹●前言

一、研究動機

在國中理化課程裡，我們已經對熱力學有初步的認識，到了高中，因為就讀化工科，學習更多的專業科目，讓我們有機會更進一步了解熱力學，並且討論其不同變因與狀態的實驗結果。

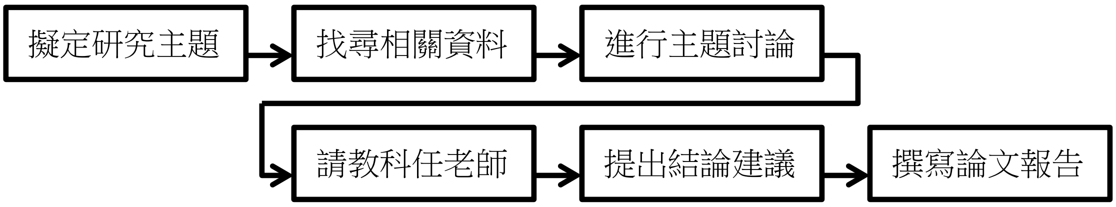
高一下的普通化學第十七章「核化學」裡有提到放射衰變率（radicative decay law），這裡需要用到指數的基本運算，當時我們的指數觀念只停留在整數次方，而任課老師在上課也有提到：「高一下的數學課會學到指數與對數的運算，記得要好好學，之後在高二的化工裝置這門課裡，我們會討論熱力學上的一些平均數，其中有一個很特別的對數平均數唷！」當時我們對此產生了無比的好奇心，因為有學過算術平均數和幾何平均數，但對於對數平均數則是毫無頭緒。

到了高二，在化工裝置課本上學到對數平均數，它出現在圓管情形下的傅立葉熱傳導方程式中，不過在看完課本後，發現它並沒有任何推導過程，也沒有清楚的敘述為何要使用對數平均數來處理圓管情形的熱傳導，為了解決心中的疑惑，先請教了化工裝置老師，老師說這需要用到微積分來證明，但，我們還不會微積分的技巧，便再去請教數學老師，結果我們發現在高中數學課程裡，並沒有提到對數平均數，數學老師也鼓勵我們找出答案，因此，我們一起展開了這次小論文的主題研究！

二、研究目的

運用指數與對數的基本技巧，配合微積分的手法，找出傅立葉熱傳導方程式在圓管情形需使用對數平均數的目的及意義，並討論在其他情形的熱傳導中，會不會有其他的平均數產生，藉由公式分析比較，加深對化工裝置熱力學的一般情形(不含熱阻、多層串聯或並聯等狀況)的運算；另外，以積分求面積的手法，求出對數平均數與算術平均數、幾何平均數之間的大小關係。

三、研究方法



貳●正文

一、關於熱

當一系統中有溫差存在時，或當兩不同溫度之物體互相之接觸時，就會有能量傳遞發生，此種由溫度差所引起之能量傳遞，稱為「熱輸送」(heat transfer)。這個觀念是由 1822 年法國科學家的約瑟夫・傅立葉（Joseph Fourier）所提出，熱是能量會從高溫處流向低溫處，無論進行物理操作或化學反應操作幾乎都伴隨著熱能量的變化，關於熱輸送的方式有下列三種：

1. 傳導

熱量藉由物質的媒介，從高溫處傳到低溫處的傳熱方式，傳導的媒介物質可以是固體、液體或氣體。單純的導熱是由於物體內分子、原子或自由電子等微觀力子的運動，將熱能從高溫區域傳遞到低溫區域的過程，而物體內部分子或質點並不發生巨觀的位移。

2. 對流

傳熱的媒介若是流體時，可因流體的流動而使高溫流體與低溫流體發生混合而傳熱，稱為對流傳熱，熱對流是流體各部分質點間發生相對位移，因水的密度變低產生浮力所造成，稱為自然對流，若在攪拌器的作用下，流體各部分質點可發生相對位移，稱為強制對流。

3. 輻射

輻射是一種通過電磁波傳遞能量的過程，物體會因各種原因發出輻射能，其中由於物體本身熱的原因而發出輻射能的過程稱為熱輻射。以電磁波的形式在空中傳播，當遇到另一物體時，又被部分地或全部地吸收，重新轉變為熱能，可見輻射傳熱不僅是能量的轉移，還同時伴有能量形式的轉化，可見輻射傳熱不需媒介，也能在真空中傳播。

二、名詞解釋

q_r ：熱流率（W）表示單位時間通過一截面積的能量。

k ：熱傳導係數（$\frac{W}{m^{\circ}C}$）表示物質傳導熱量能力的指標，值愈大愈易導熱。

dT ：壁面溫度變化（$^{\circ}C$）

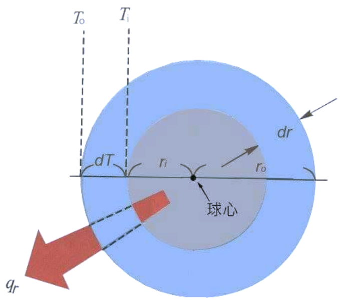
dx ：傳熱厚度（m）
A ：壁面面積（m^2）

依傳立葉傳導定律（Fourier's law of conduction）方程式 $q_r = -k\dfrac{dT}{dx}A$ ，我們將 k 定為一常數，不與壁面溫度改變 dT 有關。而方程式中的 A 可代入平板、圓管和空心球體等不同的形態的面積求出熱流率。熱流率為單位時間通過一截面積的能量，截面積又會因為物體的不同而有所變化，若是一片火爐的爐壁呈平板狀，當爐壁各點的溫度保持不變時(恆溫狀態)，熱量會由高溫的一面向另一面流動，則 $q_r = -k\dfrac{dT}{dx}A$ ，其中壁面面積 A 取長乘以寬代入即可得熱流率，但當在圓球或是圓管中時，壁面面積 A 將有特別的事發生，它們彼此碰撞出新火花，是個十分有趣的現象，下面與你一同探討、導出隱身在內的公式。

在討論之前，因為球殼的熱傳導方程式中，我們會用到幾何平均數的想法，因此，先介紹一個常見的絕對不等式--算幾不等式：對任意正實數 a，b，我們有 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，其中 $\dfrac{a+b}{2}$ 稱之為算術平均數，$\sqrt{ab}$ 稱之為幾何平均數，而其等號成立時， $a=b$ 。

三、隱身在空心球體(Hollow Sphere)中的幾何平均數

圖一、化工廠的球形貯槽



圖二、球殼邊界值圖示

在化工廠中的液化氣體貯槽，一般製成圓球形，並包覆著厚層的絕熱材料，以減少槽內液體的汽化，而這種貯槽的絕熱材料呈現厚球殼狀，因此，在熱傳導中，我們有興趣討論球殼的情形。假設球體半徑為 r，因此圓球表面積為 $4\pi r^2$ ，故由傳立葉方程式知

$$q_r = -k\frac{dT}{dr}A = -k\frac{dT}{dr}(4\pi r^2)\text{..................................}(*)$$

若再給定邊界值條件：球體內徑為 r_i、外徑為 r_o，球內溫度為 T_i、球外溫度為 T_o 。對(*)移項整理後，以給定的邊界值做積分

$$q_r \int_{r_i}^{r_o} \frac{1}{r^2} dr = \int_{T_i}^{T_o} (-4\pi k) dT$$

積分後得

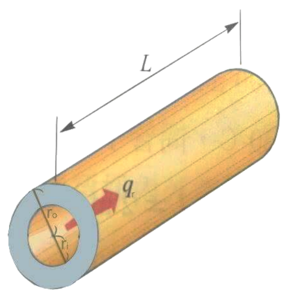
$$q_r \left((-\frac{1}{r_o}) - (-\frac{1}{r_i}) \right) = -4\pi k \left(T_o - T_i \right)$$

移項後得

$$q_r = \frac{4\pi k \left(T_i - T_o \right)}{\dfrac{1}{r_i} - \dfrac{1}{r_o}} = -k \frac{(T_o - T_i)}{r_o - r_i} 4\pi r_i r_o$$

我們觀察到 $4\pi r_i r_o = \sqrt{4\pi r_i^2 4\pi r_o^2}$ ，這恰為數學上的幾何平均數，因此，當我們在討論球殼的熱傳導，通常直接將傅立葉方程式中的壁面面積取球殼半徑的幾何平均數代替之。

四、隱身在圓管(Long, Hollow Cylinder)中的對數平均數



圖三、圓管邊界值圖示

蒸汽輸送管及熱交換器的傳熱管，為了減少熱損失，大多會在外表包覆保溫材料，這層保溫材料的形狀呈厚圓管狀。假設圓管長度為 L，半徑為 r，則圓管的表面積為 $2\pi rL$ ，故由傅立葉方程式知

$$q_r = -k \frac{dT}{dr} A = -k \frac{dT}{dr} (2\pi rL) \text{..................................} (**)$$

相同地，給定邊界值條件：管內徑為 r_i 、管外徑為 r_o ，管內溫度為 T_i 、管外溫度為 T_o ，對(**)移項整理後，以給定的邊界值做積分

$$q_r \int_{r_i}^{r_o} \frac{1}{r} dr = \int_{T_i}^{T_o} (-2\pi L) k \, dT$$

積分後得

$$q_r \left(\ln r_o - \ln r_i \right) = -2\pi Lk (T_o - T_i)$$

移項整理得

$$q_r = \frac{-2\pi Lk(T_o - T_i)}{\ln r_o - \ln r_i}$$

化簡成

$$q_r = -k\left(\frac{T_o - T_i}{\ln r_o - \ln r_i}\right)2\pi L = -k\left(\frac{T_o - T_i}{r_o - r_i}\right)2\pi\left(\frac{r_o - r_i}{\ln r_o - \ln r_i}\right)L$$

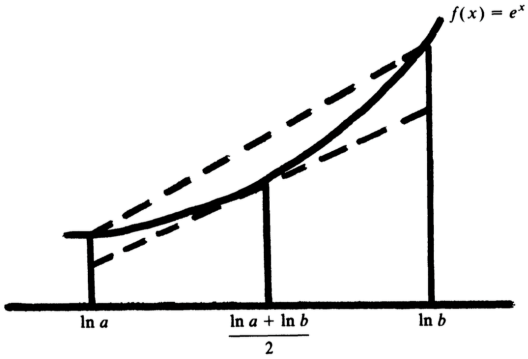
我們觀察到 $\dfrac{r_o - r_i}{\ln r_o - \ln r_i}$ 這個特殊的圓管半徑值為對數平均數，因此，當我們在討論圓管的熱傳導，通常直接將傅立葉方程式中的壁面面積取圓管半徑的對數平均數代替之。

五、對數平均數與算術平均數、幾何平均數

在第四點的圓管熱傳導中，我們得到了對數平均數這個特別的數值，因此對於他與我們學過的算術平均數、幾何平均數之間的關係有著無限的想像，所以就再去找了相關的文章，得到了以下的漂亮結果：

做 $f(x) = e^x$ 的圖形，取 $0 < a < b$，估計 $f(x)$ 在 $\ln a$ 到 $\ln b$ 的面積。因為 $f(x)$ 是凸函數，因此

$$\left(e^{\frac{\ln a + \ln b}{2}}\right)(\ln b - \ln a) < \int_{\ln a}^{\ln b} e^x\,dx < \frac{e^{\ln b} + e^{\ln a}}{2}(\ln b - \ln a)$$



圖四、利用上和與下和將 $f(x) = e^x$ 在 $\ln a$ 到 $\ln b$ 的面積做估計

也就是說

$$e^{\frac{\ln a}{2}} \cdot e^{\frac{\ln b}{2}}(\ln b - \ln a) < e^{\ln b} - e^{\ln a} < \frac{b+a}{2}(\ln b - \ln a)$$

化簡後得到

$$\sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$$

這告訴我們，對數平均數是介在幾何平均數與算術平均數之間呢！

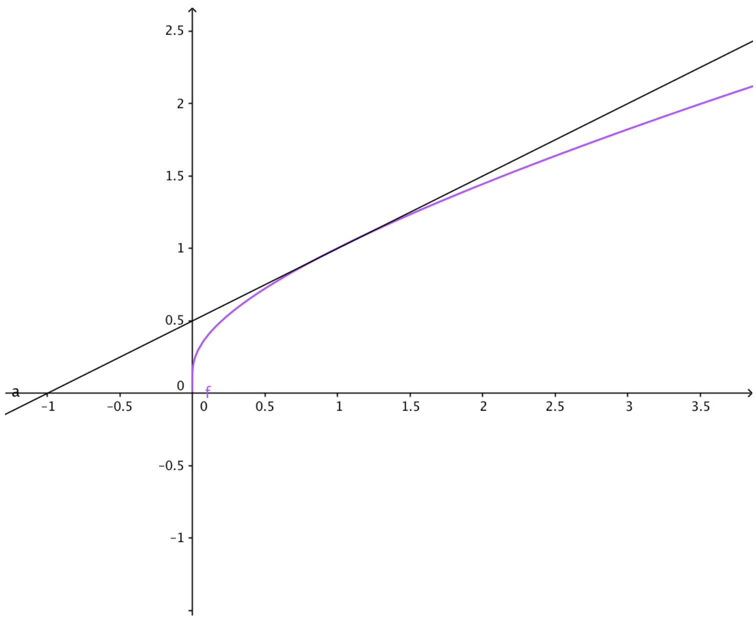
六、可用算術平均數取代對數平均數之特例說明

上面第五點有這麼漂亮的結果，而算術平均數又是在計算上比較好處理的，因此，在圓管熱傳導方程式中，觀察到另一件特別的事情：若圓管的外徑與內徑比值是介在 1 到 2 之間(也就是說 $1<\dfrac{r_o}{r_i}<2$)，則壁面面積的對數平均數 $\dfrac{r_o-r_i}{\ln r_o-\ln r_i}$ 可以用算術平均數 $\dfrac{r_o+r_i}{2}$ 取代之。

令 $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$ 與 $g(x)=\dfrac{x+1}{2}$ ，則我們利用 GeoGebra 輔助作出圖五說明，若 $1<x<2$ 時， $\dfrac{x-1}{\ln x}<\dfrac{x+1}{2}$ ，且誤差皆小於 4%，那麼令 $x=\dfrac{r_o}{r_i}$ ，則

$$\frac{\dfrac{r_o}{r_i}-1}{\ln\dfrac{r_o}{r_i}}<\frac{\dfrac{r_o}{r_i}+1}{2}$$

不等式兩邊同乘 r_i 後，化簡得 $\dfrac{r_o-r_i}{\ln r_o-\ln r_i}<\dfrac{r_o+r_i}{2}$ ，符合第五點的結果。因此，在外徑與內徑比值介在 1 到 2 之間時，可以取算術平均數估算熱流率。



圖五、當外徑與內徑比值介於 1 到 2 之間時，兩條曲線的誤差確實不大

叁●結論

熱有三種傳熱方式：傳導、對流與輻射，而在這篇文章中，我們討論熱傳導；傳立葉的熱傳導方程式會因熱流的接觸面積不同，而需使用不同的壁面面積代入其中。一般情形下，在平板中的壁面面積 A 直接取長乘以寬即可求出熱流率；在球殼的壁面面積 A，我們在以上的文章中，有證明出需取球殼半徑的幾何平均數 $4\pi r_i r_o$，帶回(*)求出熱流率；而在圓管的情形，我們也有證明是取管徑的對數平均數 $\dfrac{r_o - r_i}{\ln r_o - \ln r_i}$，再帶入(**)中求熱流率，另外，若外徑與內徑的比值 $\dfrac{r_o}{r_i} < 2$ 時，可以直接用 $\dfrac{r_o + r_i}{2}$ 取代 $\dfrac{r_o - r_i}{\ln r_o - \ln r_i}$ 算出熱流率（誤差不大）；最後，我們得到了對數平均數是介在幾何平均數與算術平均數之間的美妙結果。

這篇文章裡，我們將數學與化工結合，正所謂數學是科學之母，就是這個意思吧！做完有關這篇平均數的小論文以後，我們對於熱傳導有更深入的研究，除了在數學上將對數平均數給予定義外，也讓化工裝置課本中沒有說清楚的部分加以註解，對於今後有相同問題的化工子弟們，能因為這一篇小論文對熱傳導方面有更清楚的認知。

肆●引註資料

1. 葉和明(2009)。**輸送現象與單元操作（二）**。台北市：三民書局股份有限公司。
2. 張學義、張素民(1997)。**單元操作（上）**。台北市：文京圖書有限公司。頁137-386。
3. 林振隆、劉豫川(1998)。**單元操作（一）**。台北市：高立圖書有限公司。頁226-227。
4. 謝榮忠(2015)。**化工裝置（I）**。台北市：全華圖書股份有限公司。
5. James, R. W., & Charles, E. W., & Robert, E. W., & Gregory L. R. (Eds.). *Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer* (5th ed.). John Wiley & Sons, Inc.
6. Frank Burk (1987). The Geometric, Logarithmic, and Arithmetic Mean Inequality. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 94, No. 6. (Jun. - Jul., 1987), p. 527-528.
7. 施秉旭(2011)。對數平均溫差法應用與冷凝器上的之熱傳分析（*Application of Logarithmic Mean Temperature Difference Method to the Heat Transfer Analysis of a Condenser*）。高雄市：國立高雄海洋科技大學輪機工程系暨研究所。

8. 徐宏全(1997)。**關於對數平均數的研究**（*A Note On The Logarithmic Mean*），台北市：淡江大學數學學系碩士班碩士論文。

9. 劉瑜。**微積分**。台北大立補習班編印。

圖一. 謝榮忠(2015)。**化工裝置（I）**。台北市：全華圖書股份有限公司。p.139

圖二. 謝榮忠(2015)。**化工裝置（I）**。台北市：全華圖書股份有限公司。p.139

圖三. 謝榮忠(2015)。**化工裝置（I）**。台北市：全華圖書股份有限公司。p.137

圖四. Frank Burk (1987). The Geometric, Logarithmic, and Arithmetic Mean Inequality. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 94, No. 6. (Jun. - Jul., 1987), p. 527.