

問題 1：有 9 公升和 7 公升的容器，如何才要量出 6 公升的水。

步驟 -9 公升--7 公升

1-----9-----0

2-----2-----7

3-----2-----0

4-----0-----2

5-----9-----2

6-----4-----7

7-----4-----0

8-----0-----4

9-----9-----4

10-----6-----7

問題 2：有 12 公升、7 公升、5 公升的容器，把 12 公升的裝滿水 利用這三個容器把水平分成 6 公升和 6 公升

公升，不可加水 也不可倒掉？

步驟-12 公升-7 公升-5 公升

1-----5-----7-----0

2-----5-----2-----5

3-----10-----2-----0

4-----10-----0-----2

5-----3-----7-----2

6-----3-----4-----5

7-----8-----4-----0

8-----8-----0-----4

9-----1-----7-----4

10-----1-----6-----5

11-----6-----6-----0

Second international handbook of mathematics education

Kilpatrick

Curriculum, Goals, Contents, Resources.

請問這類的問題是否有規則可循，例如，若將第 1 題改成 a、b 公升的容器，量出 c 公升要如何解？a、b、c 關係為何？第 2 題改成 a、b、c 公升的容器，平分出 a/2，又如何解？a、b、c 關係為何？

問題 3：甲燒杯裝 101mL 食鹽水，乙燒杯是空的，第一天，甲倒 1/2 給乙；第二天，乙倒 1/3 給甲（1/3 是指食鹽水的 1/3）；第三天，甲倒 1/4 給乙（1/4 是指食鹽水的 1/4）……以此類推，問第一百天甲燒杯共有多少 mL 食鹽水？答 51mL。

解 1：

第一天 甲倒 1/2 給乙，所以第一天之後，甲杯有 $(101/2)$ ml 的食鹽水，乙杯有 $(101/2)$ ml 的食鹽水

第二天 乙倒 1/3 給甲，所以第二天之後，甲杯有 $(101/2) \times (4/3)$ ml 的食鹽水，乙杯有 $(101/2) \times (2/3)$ ml

的食鹽水；第三天 甲倒 1/4 給乙，所以第三天之後，甲杯有 $(101/2) \times (4/3) \times (3/4) = (101/2)$ ml 的食鹽水，

乙杯有 $(101/2) \times (2/3) + (101/2) \times (4/3) \times (1/4) = (101/2)$ ml 的食鹽水；第四天 乙倒 1/5 給甲，所以第四天

之後，甲杯有 $(101/2) \times (6/5)$ ml 的食鹽水，乙杯有 $(101/2) \times (4/5)$ ml 的食鹽水；第五天 甲倒 1/6 給乙

所以第五天之後，甲杯有 $(101/2) \times (6/5) \times (5/6) = (101/2)$ ml 的食鹽水，乙杯有 $(101/2) \times (4/5) + (101/2) \times (6/5) \times (1/6) = (101/2)$ ml 的食鹽水。

由以上討論可知，只要是第「n」時，若 n 是奇數，甲會倒它的 $1/(n+1)$ 給乙，若 n 是偶數，乙會倒它的 $1/(n+1)$ 給甲，而且每當第奇數天倒完水後，甲、乙兩杯水都會是 $(101/2)$ ml，因此第 99 天後，甲、乙兩杯水都會是 $(101/2)$ ml，而第 100 天時，乙倒 $1/101$ 給甲，所以第 100 天之後，甲杯有 $(101/2) \times (102/101) = 51$ ml 的食鹽水，乙杯有 $(101/2) \times (100/101) = 50$ ml 的食鹽水

解 2：

甲燒杯裝 101mL 食鹽水，乙燒杯是空的，

第一天 甲倒 $1/2$ 給乙（甲乙各 $1/2$ ），

第二天 乙倒 $1/3$ 給甲（甲 $2/3$ 乙各 $1/3$ ），（甲 $\Rightarrow 1/2 + 1/2 \times 1/3 = 2/3$ ，乙 $\Rightarrow 1/2 - 1/2 \times 1/3 = 1/3$ ），

第三天 甲倒 $1/4$ 給乙（甲乙各 $1/2$ ）（甲 $\Rightarrow 2/3 - 2/3 \times 1/4 = 1/2$ ，乙 $\Rightarrow 1/3 + 2/3 \times 1/4 = 1/2$ ），

第四天 乙倒 $1/5$ 給甲（甲 $3/5$ 乙各 $2/5$ ）（甲 $\Rightarrow 1/2 + 1/2 \times 1/5 = 3/5$ ，乙 $\Rightarrow 1/2 - 1/2 \times 1/5 = 2/5$ ）

.....

第 100 天 乙倒 $1/101$ 給甲（甲 $51/101$ 乙各 $50/101$ ）（甲 $\Rightarrow 1/2 + 1/2 \times 1/101 = 51/101$ ，乙 $\Rightarrow 1/2 - 1/2 \times 1/101 = 50/101$ ）

只要是甲倒給乙的（甲乙雙方都一樣多）

只要算最後乙倒給甲的比例就可以了！

問題 4：一桶水 12 升，要倒出 6 升水，但只有 8 升與 5 升的桶各一個，水又不能倒掉，請問如何倒？（必須寫出兩種方法）

快的方法：

主桶內 12 升 倒往 8 升桶 主桶剩 4 升

8 升桶內 8 升 倒往 5 升桶 8 升桶剩 3 升

5 升桶內 5 升 倒往 主桶 主桶現 9 升

8 升桶內 3 升 倒往 5 升桶 5 升桶現 3 升

主桶內 9 升 倒往 8 升桶 主桶剩 1 升

8 升桶內 8 升 倒往 5 升桶 8 升桶剩 6 升

結束時狀態：主桶有 1 升水 8 升桶有 6 升水 5 升桶有 5 升水。

第二方法，這個比較混亂 而且前面的步驟其實比較無謂一點

主桶內 12 升 倒往 8 升桶 主桶剩 4 升

主桶內 4 升 倒往 5 升桶 5 升桶現 4 升

8 升桶內 8 升 倒往 主桶 主桶現 8 升

5 升桶內 4 升 倒往 8 升桶 8 升桶現 4 升

主桶內 8 升 倒往 5 升桶 8 升桶剩 3 升

5 升桶內 5 升 倒往 8 升桶 5 升桶剩 1 升

8 升桶內 8 升 倒往 主桶 主桶現 11 升

5 升桶內 1 升 倒往 8 升桶 8 升桶現 1 升

主桶內 11 升 倒往 5 升桶 主桶剩 6 升

結束時狀態 主桶有 6 升水 8 升桶有 1 升水 5 升桶有 5 升水

第一個方法倒水六次，第二個方法倒水九次。

問題 5：有四個容器，A 的容量是 10 公升，B 的容量是 10 公升，C 的容量是 5 公升，D 的容量是 4 公升，A、B 已是裝滿水的桶子，C、D 未裝水。如果杯子沒有任何刻度(水也不可倒掉)，要如何把 C、D 兩個杯子的水中到各 3 公升？請列式。一次只可到一桶。如：把 A 的水倒到 C。A:10 B:10 C:0 D:0 ，A:5 B:10 C:5 D:0

A:10 B:10 C:0 D:0

→ A:6 B:10 C:0 D:4

→ A:6 B:10 C:4 D:0

→ A:6 B:6 C:4 D:4

→ A:6 B:6 C:5 D:3

→ A:6 B:9 C:5 D:0

→ A:6 B:9 C:1 D:4

→ A:7 B:9 C:0 D:4

→ A:7 B:9 C:4 D:0

→ A:7 B:8 C:5 D:0

→ A:7 B:8 C:1 D:4

→ A:8 B:8 C:0 D:4

→ A:8 B:8 C:4 D:0

→ A:8 B:4 C:4 D:4

→ A:8 B:4 C:5 D:3

→ A:10 B:4 C:3 D:3

問題 5：

(1) 用一個 5 公升的甲容器和一個 8 公升的乙容器，如何量出 2 公升的水呢？

(2) 用一個 1000 毫公升的丙容器和一個 300 毫公升的丁容器，如何量出 800 毫公升的水呢？

(3) 用一個 1600 毫公升的戊容器和一個 950 毫公升的己容器，如何量出 300 毫公升的水呢？

(1) 容器甲：5 公升，容器乙：8 公升，目標：量出 2 公升

【步驟 1】 甲裝滿水，倒進乙

【步驟 2】 甲再裝滿水，倒進乙至滿

【結果】 甲容器中剩下 2 公升即為所求

(2) 容器丙：1000 毫升，容器丁：300 毫升，目標：量出 800 毫升

【步驟 1】 丁裝滿水 3 次共 900 毫升，倒進丙

【步驟 2】 丁再裝滿第 4 次水，倒進丙至滿

【步驟 3】 此時丁剩下 200 毫升，把丙的水倒掉，把丁容器中的 200 毫升倒進丙

【步驟 4】 丁再裝滿第 5、6 次水共 600 毫升，全倒進丙

【結果】 丙容器中有 800 毫升即為所求

(3) 容器戊：1600 毫升，容器己：950 毫升，目標：量出 300 毫升

【步驟 1】 己裝滿水，倒進戊 (戊有 950)

【步驟 2】 己再裝滿水，倒進戊至滿 (戊 + 650)

【結果】 己容器中剩下 300 毫升即為所求

解 1：

(1) 用 5 公升的容器，裝滿水，第一次倒進 8 公升容器，8 公升容器裡面就有 5 公升的水，在將 5 公升容器在裝滿水，再倒近裝有 5 公升水的 8 公升的容器裡面，將 8 公升容器裝滿，現在 5 公升容器裡面的

水就剩下 2 公升了。

(2) 將 1000 毫公升的容器一半的水，再將 300 毫公升的容器裝滿水，再倒進 1000 毫公升的容器裡面，現在 1000 毫公升就有 800 毫公升的水了。

(3) 將 950 毫公升的容器裝滿水，全倒進 1600 毫公升的容器，再次將 950 毫公升的容器裝滿水，再第二次倒進 1600 毫公升的容器，將 1600 毫公升的容器裝滿，現在 950 公升的容器就剩下 300 毫公升的水了。

解 2：

(1) 把五公升的甲容器裝滿兩次，倒入 8 公升的乙容器裡，溢出來的就是 2 公升！

(2) 把 300 毫升的丁容器裝 6 次，倒入 1000 毫升的丙容器裡，溢出來的就是 800 毫升啦。

(3) 950 毫升的己容器裝滿兩次，裝入 1600 的戊容器裡，溢出來的不就是 300 毫升的水。

解 3：

(1) 先用五公升的容器裝滿水，倒入八公升的，然後五公升在裝滿水，倒入八公升到它滿，此時五公升裡面的水剩下兩公升

(2) 先用 300 裝 3 次水倒到 1000 內，裝第 4 次，倒入 1000 滿 300 的剩下 200 接著把 1000 的水全部倒掉 然後把 300 內的 200，倒入 1000 剩下 800 空的，就可以量出 800。

(3) 先把 1600 裝滿，然後用 1600 倒入 950，此時 1600 剩下 650，接著把 950 的倒掉，然後用 1600 剩下的 650，倒入 950，此時 950 剩下 300 的空位，即可量出 300。

解 4：

(1) 5 公升的甲容器=⑤，8 公升的乙容器=⑧，⑤裝滿複水，倒到⑧，之後再重複一次

$0+5=5$ |

$5-5=0$ | $0+5=8$

$0+5=5$ |

$5-3=2$ | $5-(3)=8-5=3$

(2) 1000 毫公升的丙容器=①，300 毫公升的丁容器=②，②裝滿，倒到①，之後，再重複兩次。然後，②再裝滿，把①裡剩餘的空間倒滿。①倒掉，再把②倒到①，之後②裝滿，再倒到①，重複一次後，就好了。

$0+300=300$ ||

$300-300=0$ || $0+300=300$

$0+300=300$ ||

$300-300=0$ || $300+300=600$

$0+300=300$ ||

$300-300=0$ || $600+300=900$

$0+300=300$ ||

$300-100=200$ || $900+(100)=1000$ ※ $1000-900=100$

補充

|| $1000-1000=0$

$200-200=0$ || $0+200=200$

$0+300=300$ ||

$300-300=0$ || $200+300=500$

$$0+300=300 \quad ||$$

$$300-300=0 \quad || 500+300=800$$

(3) 1600 毫公升的戊容器=①，950 毫公升的己容器=⑨，⑨裝滿水，倒到①，之後再重複一次，就好了

$$0+950=950 \quad ||$$

$$950-950=0 \quad || 0+950=950$$

$$0+950=950 \quad ||$$

$$950-650=300 \quad || 950+(650)=1600 \times 1600-950=650$$

關鍵就在於「互質」，「互質」是什麼？就是當兩數或更多的公因數只有 1 時，那兩數互質。

對於倒水問題，那兩數或更多必需互質，可是對於倒水問題，必需把任一個數變沒 0，以(3)來說

1600 <====> 950 ----- 160 <====> 95

95 與 160 互質，所以這題目成立。PS: 需量出來的數量不算。

問題 6：只有這 2 個瓶子，有一個剛剛好 5 公升的不規則水瓶和一個 3 公升的不規則水瓶，如何倒出剛好 4 公升的水呢？

解 1：
假設 5 公升為大瓶子，3 公升為小瓶子，將大瓶裝滿倒入小瓶也裝滿，大瓶剩下 2 公升，小瓶剛好 3 公升。再將小瓶倒掉，大瓶裡的 2 公升倒入小瓶子裡，大瓶剩下 0 公升，小瓶剩下 2 公升，再將大瓶子裝滿，倒入小瓶子也倒滿，大瓶剩下 4 公升，小瓶 3 公升(只有 2 個瓶子，無法 2*2)。

解 2：
將小瓶裝滿倒入大瓶，大瓶剩下 3 公升，小瓶剩下 0 公升將小瓶再裝滿，倒入大瓶至裝滿，大瓶剩下 5 公升，小瓶剩下 1，將大瓶倒掉，倒入小瓶的 1 公升給大瓶，大瓶剩下 1 公升，小瓶剩下 0 公升，再將小瓶裝滿，倒入大瓶內，大瓶剩下 4 公升，小瓶剩下 0 公升。

解 3：
裝 3L 的水到 5L 的瓶子，此時 5L 瓶剩 2L 容量，再裝 3L 水到 5L 瓶，但剩下 1L 水到不進去，此時把 5L 瓶的 5L 水到掉，把 3L 瓶的 1L 水倒入 5L 瓶裡，再裝 3L 水到一次，就有 4L 水了。

解 4：
3 公升的不規則水瓶裝滿 2 次，倒入 5 公升的不規則水瓶後，3 公升的不規則水瓶中剩下 1 公升的水留下，倒掉 5 公升的不規則水瓶中的水，將 3 公升的不規則水瓶中所剩下 1 公升的水，倒入 5 公升的不規則水瓶後，再裝滿 3 公升的不規則水瓶的水，倒入 5 公升的不規則水瓶，如此 5 公升的不規則水瓶中就有剛好 4 公升的水。

解 5：
3 公升的水瓶裝滿水，倒入 5 公升的水瓶裡，當水倒入第二次時，此時 5 公升的瓶已滿，而 3 公升的水瓶裡剩下 1 公升的水，這樣就有 1 公升水，3 公升的水瓶 + 剩下 1 公升的水 = 4 公升。

解 6：
先把 5 公升的水瓶裝滿，倒入 3 公升的水瓶裡，當 3 公升的水瓶滿時，此時 5 公升水瓶裡的水剩下 2 公升，重複這個動作，剩下的 2 公升 * 2 = 4 公升

解 7：
裝滿 5 公升水 → 倒入 3 公升瓶(裝滿)，倒掉 3 公升瓶內的水，將 5 公升瓶內剩下的水 2 公升 → 倒入 3 公升瓶，再裝滿 5 公升水 → 倒入 3 公升瓶(只能再倒入 1 公升)，此時，5 公升瓶內的水只剩 4 公升。

解 8：
1. 三公升水瓶裝滿倒入五公升水瓶中(五公升水瓶會有三公升水)

2. 再一次將三公升的水瓶裝滿倒入五公升水瓶中…
 (五公升水瓶已有三公升水，所以只能再倒入二公升水)
 那三公升的水瓶會剩一公升的水…(三公升水瓶只倒走二公升水)
 將五公升水瓶的水倒掉…
 將三公升水瓶的一公升水先倒入五公升水瓶…
 (五公升水瓶內就有一公升的水)
 3. 再將三公升水瓶裝滿，倒入五公升水瓶，就是四公升水嘍！
 (五公升水瓶原有一公升水+三公升水瓶倒入的三公升=五公升水)

問題 7:

有 A、B 兩容器，A 容器有 13 公升，B 容器是空的，第一次將 A 容器的二分之一倒入 B，第二次將 B 容器的三分之一倒入 A，第三次將 A 容器的四分之一倒入 B.....，一直到第二十次，請問 A 容器有多少容量？

因為這是比例問題，先將所有的量當成 1，最後再乘以 13 就是所求
 下表是每次倒完後，兩容器所有的量。
 如第 2 次倒完，B 容器倒 1/3 剩原來的 2/3，所以用 $1/2 * 2/3 = 1/3$

次數	A 容器	B 容器
	1	0
1	$1/2$	$1/2$
2	$1 - 1/3 = 2/3$	$1/2 * 2/3 = 1/3$
3	$2/3 * 3/4 = 1/2$	$1/2$
4	$1 - 2/5 = 3/5$	$1/2 * 4/5 = 2/5$
5	$3/5 * 5/6 = 1/2$	$1/2$
6	$4/7$	$1/2 * 6/7 = 3/7$
M(奇數)	$1/2$	$1/2$
N(偶數)	$1 - \frac{N}{2(N+1)}$	$1/2 * \frac{N}{(N+1)} = \frac{N}{2(N+1)}$

當 $N = 20$ B 容器有 $20/2 * 21 = 10/21$ A 容器有 $1 - 10/21 = 11/21$ $13 * 11/21 = 143/21$

問題 8:

利用 5 公升和 3 公升的瓶子，在水無限提供的情形下，倒出 4 公升的水，把過程記錄在下表中：

第一次 第二次 第三次 第四次 第五次 第六次 第七次 第八次
 5 公升： 0 3 3 5 0 1 1 4
 3 公升： 3 0 3 1 1 0 3 0

請問要如何求解？如果用 6 公升和 4 公升的瓶子，可以倒出 5 公升的水嗎？答案是不能，請問要如何解釋為什麼不能呢？p. s. 在倒水遊戲中，如果兩個瓶子的容量之間，除了 1 之外，沒有其他的公因數，就可以倒出任意指定的水量

- 再請教以下幾個問題，又要如何解題呢？

- Q1: 有 2 個水桶，容量分別是 9 公升和 7 公升，在水無限供應的情況下，可以倒出 6 公升的水嗎？
- Q2: 有 2 個水桶，容量分別是 8 公升和 6 公升，在水無限供應的情況下，可以倒出 5 公升的水嗎？
- Q3: 有 3 個水桶，容量分別是 12 公升，7 公升和 5 公升，將 12 公升的水桶裝滿水，7 公升和 5 公升的水桶是空的，請用這 3 個水桶，把 12 公升的水平分成 6 公升和 6 公升

問題 1：有 9 公升和 7 公升的容器，如何才要量出 6 公升的水。

問題 2：有 12 公升、7 公升、5 公升的容器，把 12 公升的裝滿水 利用這三個容器把水平分成 6 公升和 6

公升，不可加水 也不可倒掉？

問題 3：甲燒杯裝 101mL 食鹽水，乙燒杯是空的，第一天，甲倒 $\frac{1}{2}$ 給乙；第二天，乙倒 $\frac{1}{3}$ 給甲（ $\frac{1}{3}$ 是指食鹽水的 $\frac{1}{3}$ ）；第三天，甲倒 $\frac{1}{4}$ 給乙（ $\frac{1}{4}$ 是指食鹽水的 $\frac{1}{4}$ ）……以此類推，問第一百天甲燒杯共有多少 mL 食鹽水？

問題 4：一桶水 12 升，要倒出 6 升水，但只有 8 升與 5 升的桶各一個，水又不能倒掉，請問如何倒？

問題 5：有四個容器，A 的容量是 10 公升，B 的容量是 10 公升，C 的容量是 5 公升，D 的容量是 4 公升，A、B 已是裝滿水的桶子，C、D 未裝水。如果杯子沒有任何刻度(水也不可倒掉)，要如何把 C、D 兩個杯子的水中到各 3 公升？請列式。一次只可到一桶。如：把 A 的水倒到 C。A:10 B:10 C:0 D:0 ，A:5 B:10 C:5 D:0

問題 6：

(1) 用一個 5 公升的甲容器和一個 8 公升的乙容器，如何量出 2 公升的水呢？

(2) 用一個 1000 毫公升的丙容器和一個 300 毫公升的丁容器，如何量出 800 毫公升的水呢？

(3) 用一個 1600 毫公升的戊容器和一個 950 毫公升的己容器，如何量出 300 毫公升的水呢？

問題 7：只有這 2 個瓶子，有一個剛剛好 5 公升的不規則水瓶和一個 3 公升的不規則水瓶，如何倒出剛好 4 公升的水呢？

問題 8：有 A、B 兩容器，A 容器有 13 公升，B 容器是空的，第一次將 A 容器的二分之一倒入 B，第二次將 B 容器的三分之一倒入 A，第三次將 A 容器的四分之一倒入 B.....，一直到第二十次，請問 A 容器有多少容量？

問題 9：

利用 5 公升和 3 公升的瓶子，在水無限提供的情形下，倒出 4 公升的水，把過程記錄在下表中：

第一次 第二次 第三次 第四次 第五次 第六次 第七次 第八次

5 公升： 0 3 3 5 0 1 1 4

3 公升： 3 0 3 1 1 0 3 0

問題 10：

Q1: 有 2 個水桶，容量分別是 9 公升和 7 公升，在水無限供應的情況下，可以倒出 6 公升的水嗎？

Q2: 有 2 個水桶，容量分別是 8 公升和 6 公升，在水無限供應的情況下，可以倒出 5 公升的水嗎？

Q3: 有 3 個水桶，容量分別是 12 公升，7 公升和 5 公升，將 12 公升的水桶裝滿水，7 公升和 5 公升的水桶是空的，請用這 3 個水桶，把 12 公升的水平分成 6 公升和 6 公升

問題 11：

利用 10 升桶、7 升桶、3 升桶量出 5 升麻油