標準積項(standard product term)

n 個變數有 2^n 個結合的項，若每一項均含有全部的變數，且以 AND 運算表示，則稱爲標準積項或最小項(minterm)。例如：$\overline{A}\overline{B}C$，$A\overline{B}\overline{C}$，$ABC$ 均是；而 $A\overline{B}$ 及 $B\overline{C}$ 則不是，因爲 $A\overline{B}$ 項中缺少 C 變數，而 $B\overline{C}$ 項中缺少 A 變數(假設只有 A、B、C 三個變數的情況下)。

標準和項(standard sum term)

n 個變數有 2^n 個結合的項，若每一項均含有全部的變數，且以OR 運算表示，則稱爲標準和項或最大項(maxterm)。例如：$(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})$, $(\overline{A}+\overline{B}+C)$, $(A+\overline{B}+C)$ 均是；而 $(A+\overline{B})$, $(\overline{A}+\overline{C})$ 則不是，因爲 $(A+\overline{B})$ 項中缺少 C 變數，而 $(\overline{A}+\overline{C})$ 項中，則缺少 B 變數。(同樣假設只有 A、B、C 三個變數的情況下)。

表 5-1　最小項與最大項的對照表

十進制	A	B	C	最小項	最大項
0	0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = m_0$	$A + B + C = M_0$
1	0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}\,C = m_1$	$A + B + \overline{C} = M_1$
2	0	1	0	$\overline{A}B\overline{C} = m_2$	$A + \overline{B} + C = M_2$
3	0	1	1	$\overline{A}BC = m_3$	$A + \overline{B} + \overline{C} = M_3$
4	1	0	0	$A\overline{B}\,\overline{C} = m_4$	$\overline{A} + B + C = M_4$
5	1	0	1	$A\overline{B}C = m_5$	$\overline{A} + B + \overline{C} = M_5$
6	1	1	0	$AB\overline{C} = m_6$	$\overline{A} + \overline{B} + C = M_6$
7	1	1	1	$ABC = m_7$	$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} = M_7$

切記！　積項的結果為1，和項的結果為0

積項之和(SOP，Sum Of Product)

所謂積項之和(SOP)的布林函數，即以OR運算結合而成的若干積項；例如：

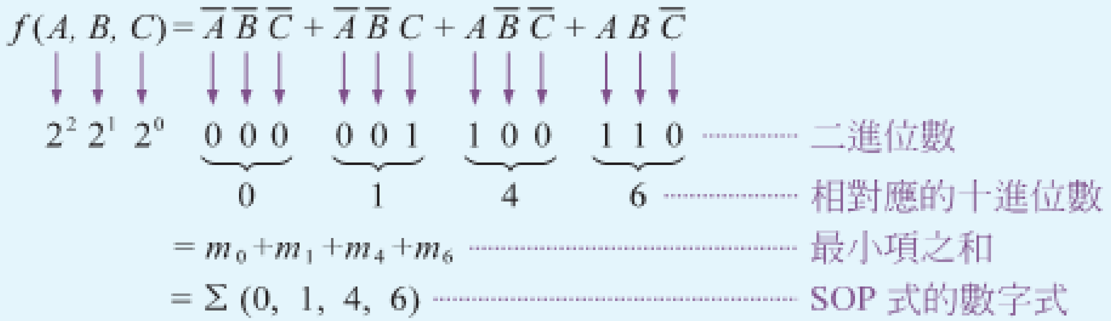
$$f(A, B, C) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C}$$

其中，f 表一輸出函數(function)，A、B、C 則爲其輸入變數，A 爲 MSB(最高有效位元)，C 爲 LSB(最低有效位元)；由於積項的邏輯狀態定義爲 1，所以，積項內各輸入變數值爲 1 者，以原變數代表；反之，若其值爲 0 者，則以該變數的補數代表，如此，積項內各輸入變數作 AND 運算後，才能爲 1，例如：

$$m_6 = 110_{(2)} = AB\overline{C}$$

$$(\because AB\overline{C} = 1 \cdot 1 \cdot \overline{0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1)$$

所以當 SOP(積項之和)式中的每一積項均爲標準積項時，我們常用簡單的數學式來表示，即



$$f(A, B, C) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,B\,\overline{C}$$

$2^2\ 2^1\ 2^0$　$\underbrace{0\ 0\ 0}_{0}$　$\underbrace{0\ 0\ 1}_{1}$　$\underbrace{1\ 0\ 0}_{4}$　$\underbrace{1\ 1\ 0}_{6}$ ……二進位數 / 相對應的十進位數

$= m_0 + m_1 + m_4 + m_6$ ……最小項之和

$= \Sigma\,(0, 1, 4, 6)$ ……SOP 式的數字式

和項之積(POS，Product Of Sum)

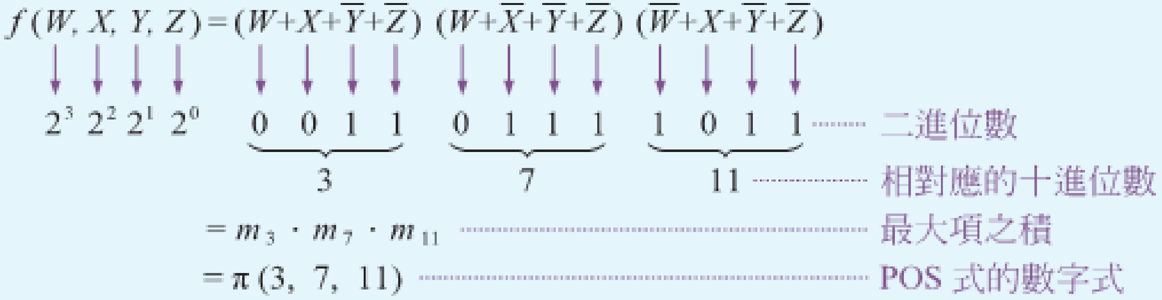
所謂和項之積(POS)的布林函數，即以 AND 運算結合而成的若干和項；例如：

$$f(W,\ X,\ Y,\ Z)=(W+X+\overline{Y}+\overline{Z})(\overline{W}+X+Y+Z)$$
$$(\overline{W}+\overline{X}+Y+Z)$$

如同 SOP 式的布林函數一般，f 表一輸出函數，W、X、Y、Z 爲其輸入變數(亦常使用 A、B、C、D 等代表)，W 爲MSB，Z 爲LSB；由於和項的邏輯狀態定義爲 0，所以，和項內各輸入變數值爲 0 者，以原變數代表；反之，若其值爲 1 者，則以該變數的補數代表。如此，和項內各輸入變數作 OR 運算後，才能爲 0，例如：

$$M_8=1000_{(2)}=\overline{W}+X+Y+Z$$
$$(\because \overline{W}+X+Y+Z=\overline{1}+0+0+0=0)$$

所以當 POS(和項之積)式中的每一和項均爲標準和項時，我們常用簡單的數字式來表示，即



$$f(W,X,Y,Z)=(W+X+\overline{Y}+\overline{Z})\ (W+\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z})\ (\overline{W}+X+\overline{Y}+\overline{Z})$$

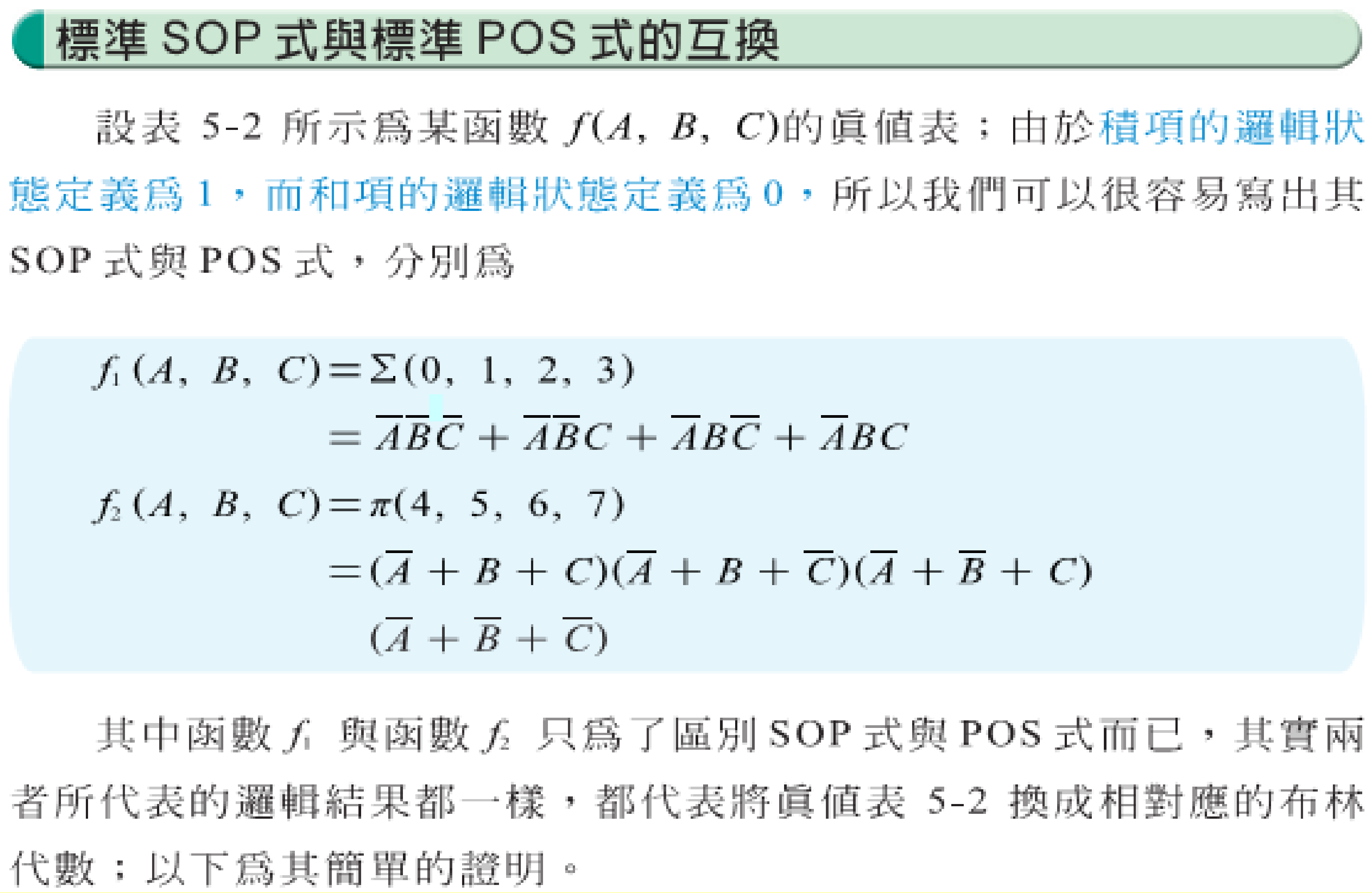
$$2^3\ 2^2\ 2^1\ 2^0\quad \underbrace{0\ 0\ 1\ 1}_{3}\quad \underbrace{0\ 1\ 1\ 1}_{7}\quad \underbrace{1\ 0\ 1\ 1}_{11}$$

二進位數

相對應的十進位數

$=m_3\cdot m_7\cdot m_{11}$ 最大項之積

$=\pi(3,\ 7,\ 11)$ POS 式的數字式



標準 SOP 式與標準 POS 式的互換

設表 5-2 所示爲某函數 $f(A, B, C)$的眞值表；由於積項的邏輯狀態定義爲 1，而和項的邏輯狀態定義爲 0，所以我們可以很容易寫出其 SOP 式與 POS 式，分別爲

$$f_1(A, B, C) = \Sigma(0, 1, 2, 3)$$

$$= \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC$$

$$f_2(A, B, C) = \pi(4, 5, 6, 7)$$

$$= (\overline{A} + B + C)(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

其中函數 f_1 與函數 f_2 只爲了區別 SOP 式與 POS 式而已，其實兩者所代表的邏輯結果都一樣，都代表將眞值表 5-2 換成相對應的布林代數；以下爲其簡單的證明。

表 5-2　函數 $f(A, B, C)$的真值表

十進制	輸入			輸出
	A	B	C	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

$$
\begin{aligned}
f_1(A,\ B,\ C) &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC \\
&= \overline{A}\,\overline{B}(\overline{C} + C) + \overline{A}B(\overline{C} + C) \text{ ....(提出公因式)} \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B \text{ ....} (\because \overline{C} + C = 1) \\
&= \overline{A}(\overline{B} + B) \text{ ....(提出公因式)} \\
&= \overline{A} \text{ ....} (\because \overline{B} + B = 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(A,\ B,\ C) = {} & (\overline{A} + B + C)(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C) \\
& (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}) = \overline{A}
\end{aligned}
$$

由於 $f_1(A, B, C) = f_2(A, B, C)$；所以，往後我們就可以很容易將 SOP 式與 POS 式作互換了，例如

例題 4

$f(A, B, C) = \Sigma(0, 2, 3)$ SOP 數字式

$= \pi(1, 4, 5, 6, 7)$ POS 數字式

例題 5

$f(W, X, Y, Z) = \pi(0, 1, 8, 9, 12, 14, 15)$ POS 數字式

$= \Sigma(2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 13)$ SOP 數字式

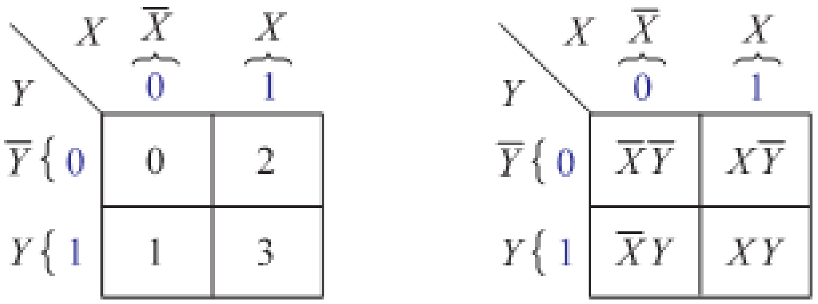
不曉得大家發現一項有趣的現象沒？即只要將 SOP(或 POS)的數字式中未出現的項數(數字)，填入POS(或SOP)的數字式中；如此，就是兩種式子的互換方法了。

5-2-2　卡諾圖化簡布林代數

卡諾圖是由一些小方格所組成的，每一小方格恰好對應所欲化簡的邏輯函數真值表中每一橫列的二進位數值；也就是說，n 個輸入變數的邏輯函數，其卡諾圖就必須有 2^n 個小方格，每一小方格代表一個標準項(最小項或最大項)。小方格位置的編排有一個原則：相鄰的兩格(亦即相鄰的兩項)其所對應的輸入變數(常以 A, B, C…或 X, Y, Z 表示)值，只能有一個不同。例如：某小方格對應的輸入變數為 $A\overline{B} = 10$ 時，則其相鄰的兩小格分別為 $\overline{A}\overline{B} = 00$及 $AB = 11$；因為 $\overline{A}\overline{B}$ 與 $A\overline{B}$ 只有 A 輸入變數值不同，而 AB 與 $A\overline{B}$ 則只有 B 輸入變數值不同。具有這種性質的兩個項，我們就稱為相鄰項(adjacencies)。

列數	X	Y	最小項
0	0	0	$\overline{X}\,\overline{Y}$
1	0	1	$\overline{X}\,Y$
2	1	0	$X\,\overline{Y}$
3	1	1	$X\,Y$

(a) 真值表



(b) 卡諾圖和方格編號　　(c) 卡諾圖和最小項

圖 5-1　二個輸入變數之卡諾圖

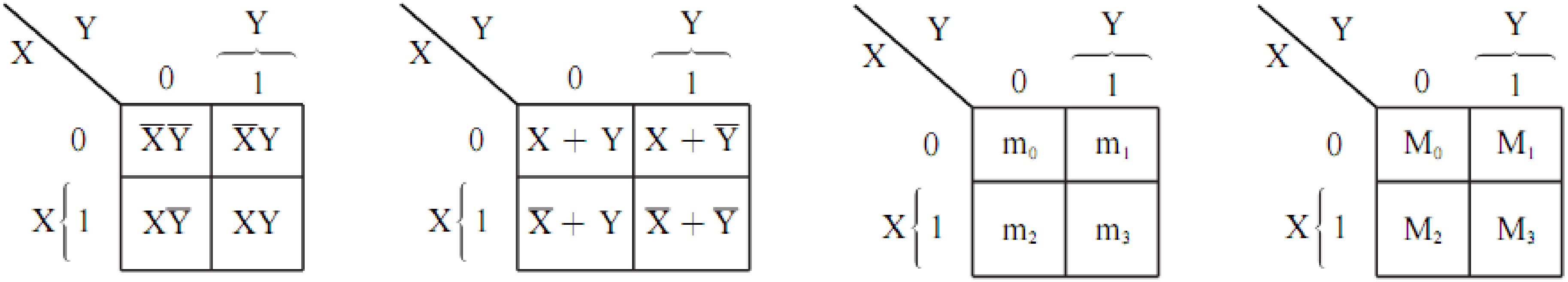
十進制	XY	最小項	最大項
0	00	$\overline{X}\,\overline{Y}$	$X + Y$
1	01	$\overline{X}Y$	$X + \overline{Y}$
2	10	$X\overline{Y}$	$\overline{X} + Y$
3	11	XY	$\overline{X} + \overline{Y}$

(a)真值表

X \ Y	0	1
0	0	1
1	2	3

(b)二變數排列順序

圖 4-1　二變數之卡諾圖



X \ Y	0	1
0	$\overline{X}\overline{Y}$	$\overline{X}Y$
1	$X\overline{Y}$	XY

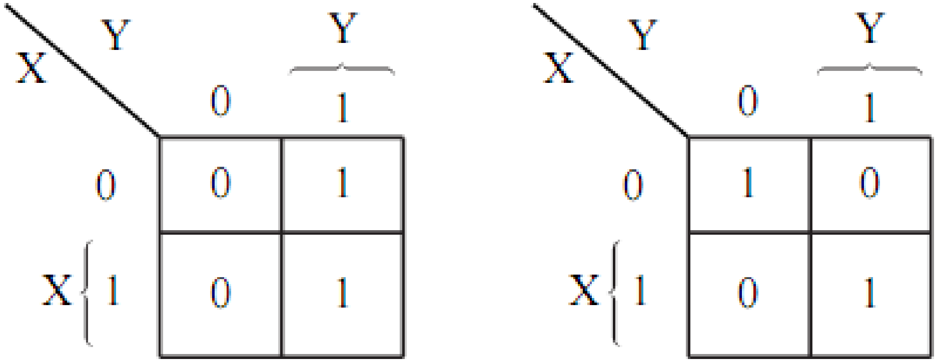
X \ Y	0	1
0	$X+Y$	$X+\overline{Y}$
1	$\overline{X}+Y$	$\overline{X}+\overline{Y}$

(c)最小項和最大項

X \ Y	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

X \ Y	0	1
0	M_0	M_1
1	M_2	M_3

(d)最小項和最大項



X \ Y	0	1
0	0	1
1	0	1

X \ Y	0	1
0	1	0
1	0	1

$$f(X,Y)=\Sigma(1,3)=m_1+m_3=\overline{X}Y+XY$$

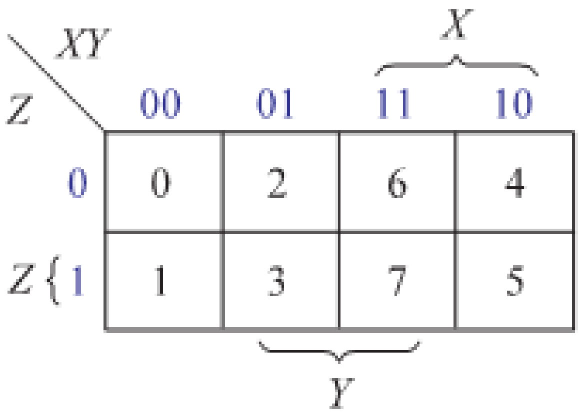
$$f(X,Y)=\Pi(1,2)=M_1\cdot M_2=(X+\overline{Y})(\overline{X}+Y)$$

(e)布林函數和卡諾圖的對應

圖 4-1　二變數之卡諾圖（續）

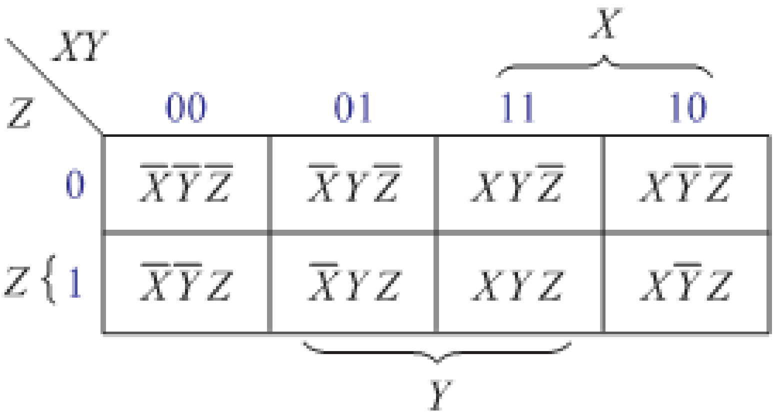
列數	X	Y	Z	最小項
0	0	0	0	$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$
1	0	0	1	$\overline{X}\,\overline{Y}\,Z$
2	0	1	0	$\overline{X}\,Y\,\overline{Z}$
3	0	1	1	$\overline{X}\,Y\,Z$
4	1	0	0	$X\,\overline{Y}\,\overline{Z}$
5	1	0	1	$X\,\overline{Y}\,Z$
6	1	1	0	$X\,Y\,\overline{Z}$
7	1	1	1	$X\,Y\,Z$

(a) 眞值表



Z \ XY	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

(b) 卡諾圖和方格編號

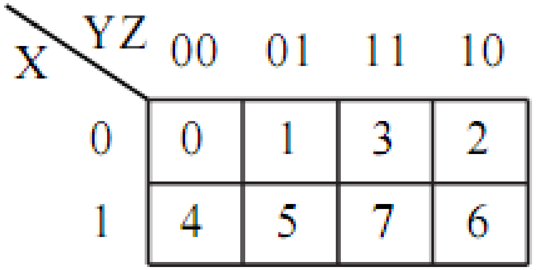


Z \ XY	00	01	11	10
0	$\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$	$\overline{X}Y\overline{Z}$	$XY\overline{Z}$	$X\overline{Y}\overline{Z}$
1	$\overline{X}\overline{Y}Z$	$\overline{X}YZ$	XYZ	$X\overline{Y}Z$

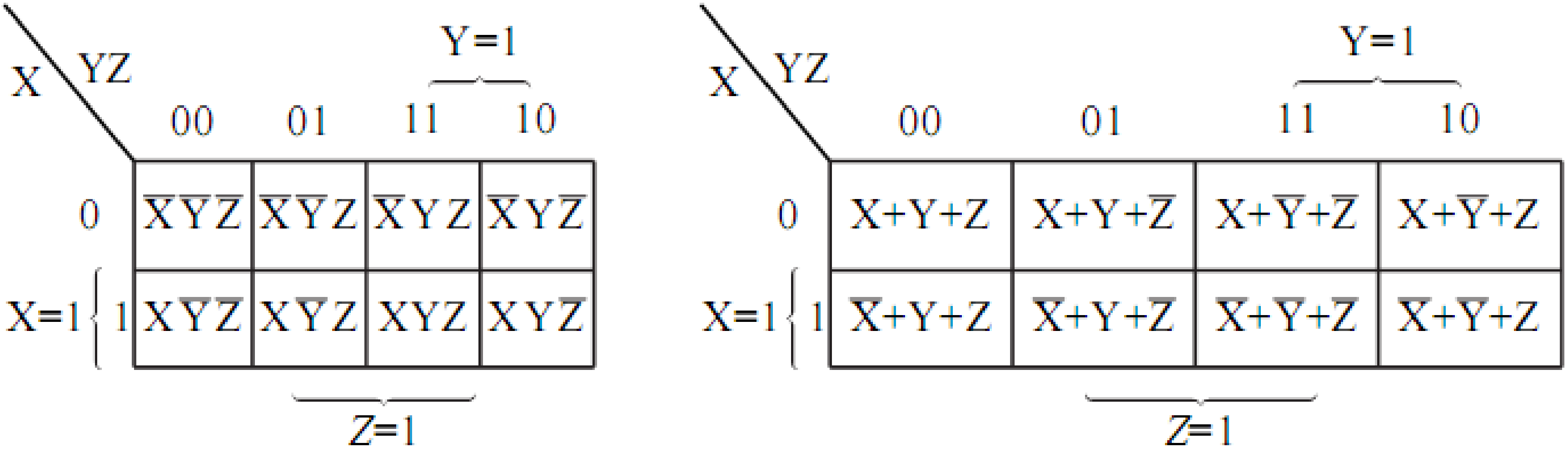
(c) 卡諾圖和最小項

圖 5-2 三個輸入變數之卡諾圖

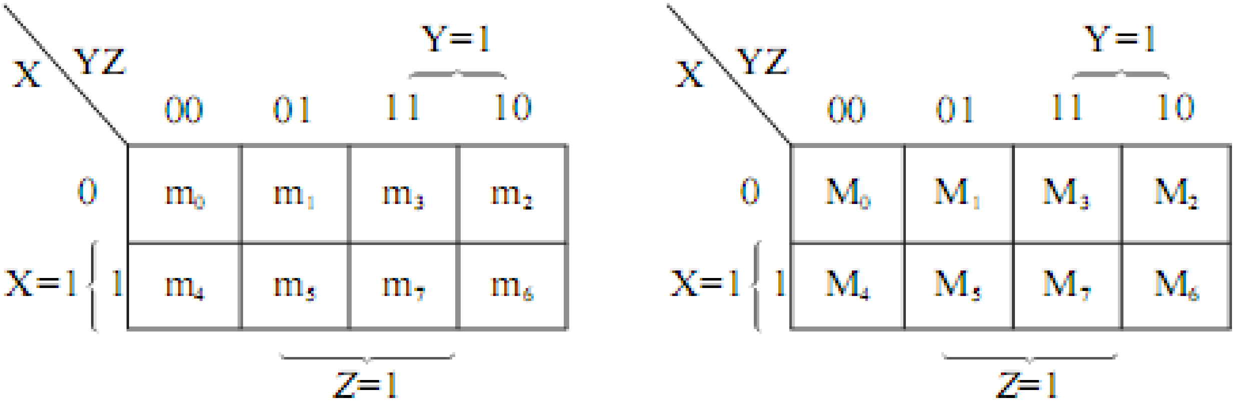
十進制	XYZ	最小項	最大項
0	000	$\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$	$X+Y+Z$
1	001	$\overline{X}\overline{Y}Z$	$X+Y+\overline{Z}$
2	010	$\overline{X}Y\overline{Z}$	$X+\overline{Y}+Z$
3	011	$\overline{X}YZ$	$X+\overline{Y}+\overline{Z}$
4	100	$X\overline{Y}\overline{Z}$	$\overline{X}+Y+Z$
5	101	$X\overline{Y}Z$	$\overline{X}+Y+\overline{Z}$
6	110	$XY\overline{Z}$	$\overline{X}+\overline{Y}+Z$
7	111	XYZ	$\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$



(b)三變數排列順序



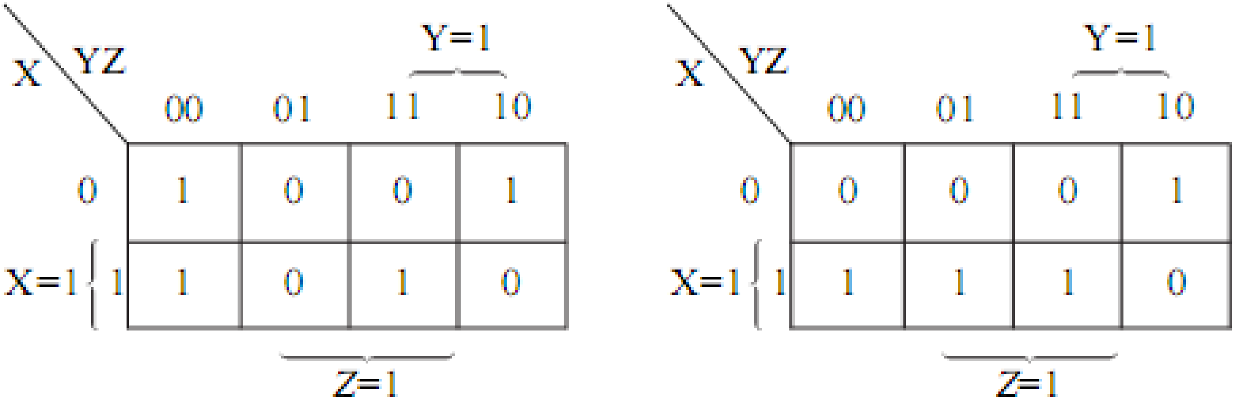
(c)最小項和最大項



X \ YZ	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

X \ YZ	00	01	11	10
0	M_0	M_1	M_3	M_2
1	M_4	M_5	M_7	M_6

(d)最小項和最大項



X \ YZ	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	1	0

X \ YZ	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	1	1	1	0

$$X, Y, Z) = \Sigma(0, 2, 4, 7) = m_0 + m_2 + m_4 + m_7 = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\,\overline{Z} + XYZ$$

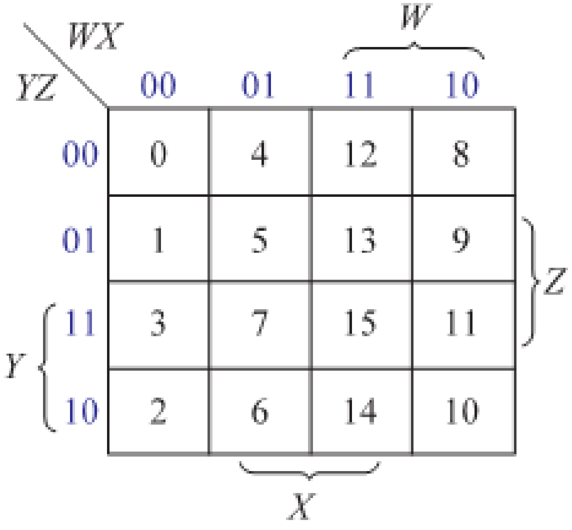
$$f(X, Y, Z) = \Pi(0, 1, 3, 6) = M_0 \cdot M_1 \cdot M_3 \cdot M_6 = (X + Y + Z)(X + Y + \overline{Z})(X + \overline{Y} + \overline{Z})(\overline{X} + \overline{Y} + Z)$$

(e)布林函數和卡諾圖的對應

圖 4-2　三變數之卡諾圖

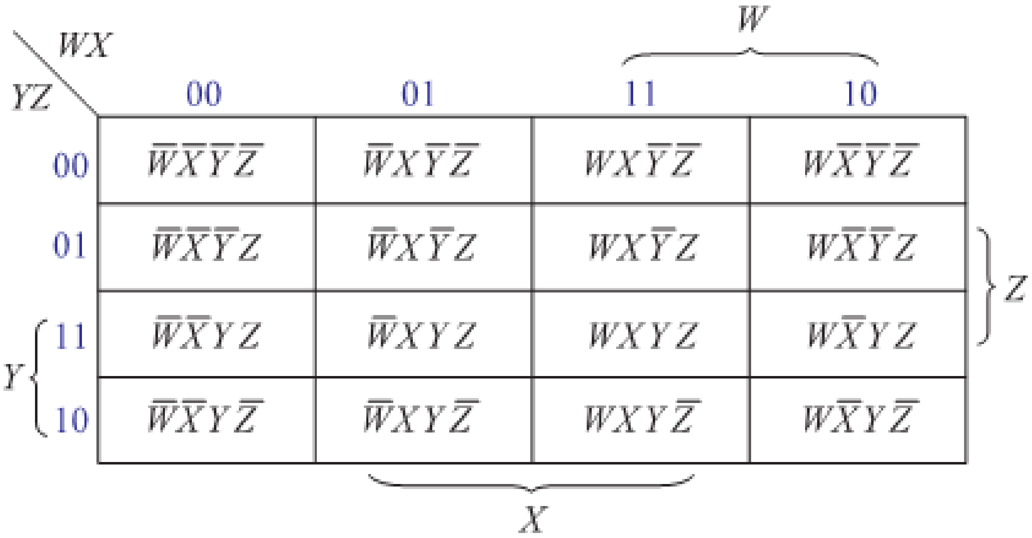
列數	W	X	Y	Z	最小項
0	0	0	0	0	$\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$
1	0	0	0	1	$\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,Z$
2	0	0	1	0	$\overline{W}\,\overline{X}\,Y\,\overline{Z}$
3	0	0	1	1	$\overline{W}\,\overline{X}\,Y\,Z$
4	0	1	0	0	$\overline{W}\,X\,\overline{Y}\,\overline{Z}$
5	0	1	0	1	$\overline{W}\,X\,\overline{Y}\,Z$
6	0	1	1	0	$\overline{W}\,X\,Y\,\overline{Z}$
7	0	1	1	1	$\overline{W}\,X\,Y\,Z$
8	1	0	0	0	$W\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$
9	1	0	0	1	$W\,\overline{X}\,\overline{Y}\,Z$
10	1	0	1	0	$W\,\overline{X}\,Y\,\overline{Z}$
11	1	0	1	1	$W\,\overline{X}\,Y\,Z$
12	1	1	0	0	$W\,X\,\overline{Y}\,\overline{Z}$
13	1	1	0	1	$W\,X\,\overline{Y}\,Z$
14	1	1	1	0	$W\,X\,Y\,\overline{Z}$
15	1	1	1	1	$W\,X\,Y\,Z$

(a) 眞値表



$YZ \backslash WX$	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

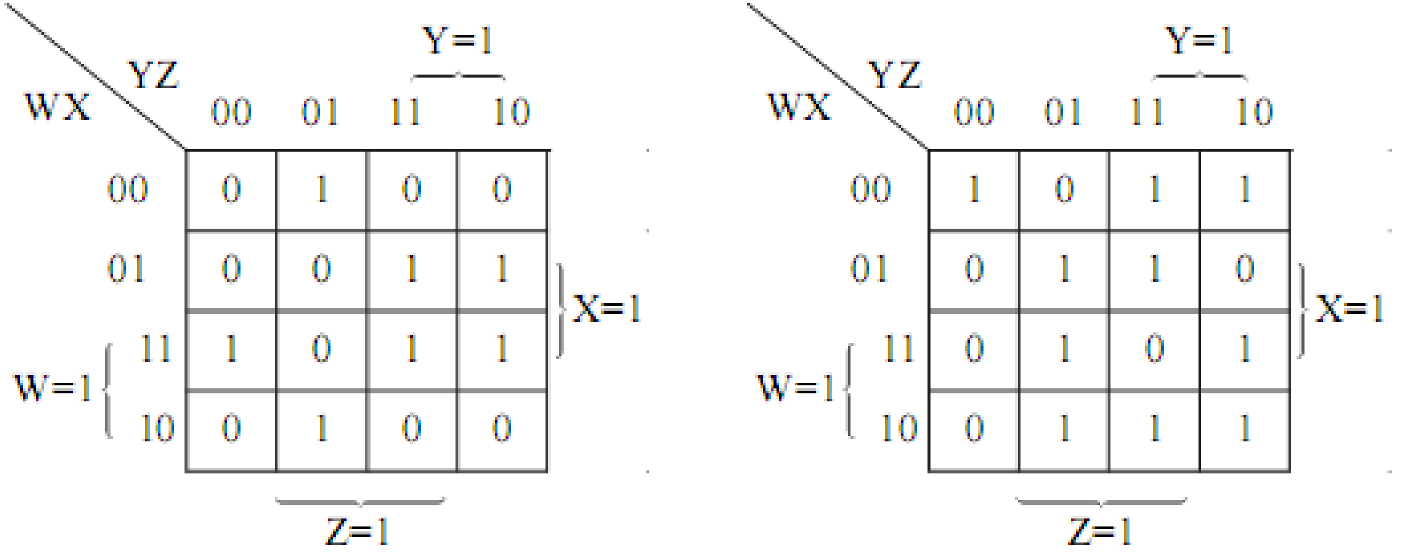
(b) 卡諾圖和方格編號



$YZ \backslash WX$	00	01	11	10
00	$\overline{W}\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$	$\overline{W}X\overline{Y}\overline{Z}$	$WX\overline{Y}\overline{Z}$	$W\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$
01	$\overline{W}\overline{X}\overline{Y}Z$	$\overline{W}X\overline{Y}Z$	$WX\overline{Y}Z$	$W\overline{X}\overline{Y}Z$
11	$\overline{W}\overline{X}YZ$	$\overline{W}XYZ$	$WXYZ$	$W\overline{X}YZ$
10	$\overline{W}\overline{X}Y\overline{Z}$	$\overline{W}XY\overline{Z}$	$WXY\overline{Z}$	$W\overline{X}Y\overline{Z}$

(c) 卡諾圖和最小項

圖 5-3　四個輸入變數之卡諾圖



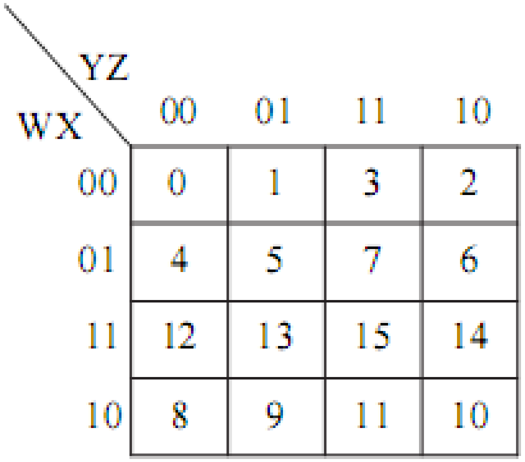
WX \ YZ	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	0	1	1
11	1	0	1	1
10	0	1	0	0

WX \ YZ	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	1
10	0	1	1	1

$$f(W,X,Y,Z) = \Sigma(1,6,7,9,12,14,15) = m_1+m_6+m_7+m_9+m_{12}+m_{14}+m_{15}$$

$$f(W,X,Y,Z) = \Pi(1,4,6,8,12,15) = M_1M_4M_6M_8M_{12}M_{15}$$

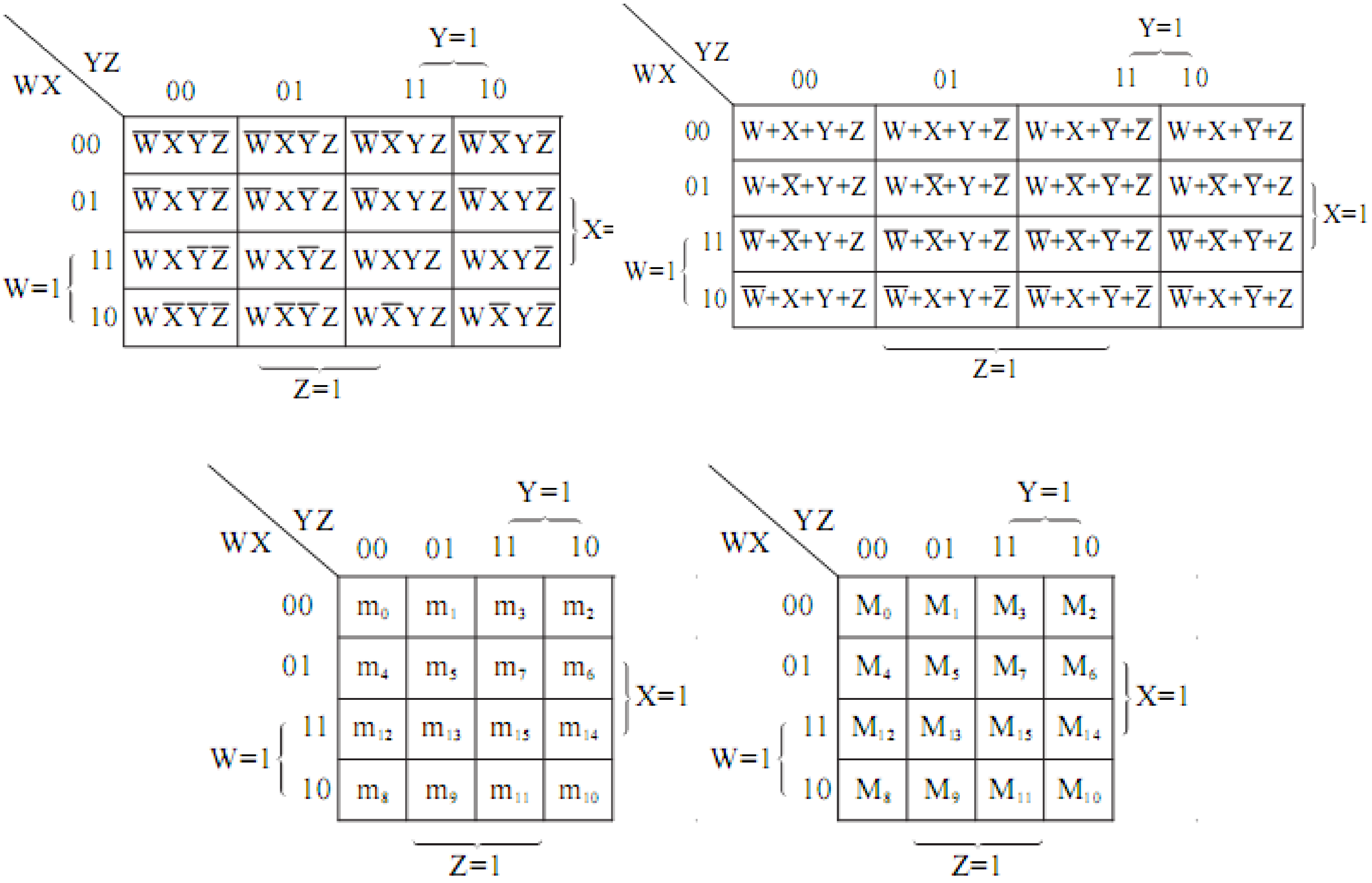
(b)布林函數和卡諾圖的對應



WX \ YZ	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

(c)四變數排列

圖 4-3　四變數的卡諾圖



WX \ YZ	00	01	11	10
00	$\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	$\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}Z$	$\overline{W}\,\overline{X}YZ$	$\overline{W}\,\overline{X}Y\overline{Z}$
01	$\overline{W}X\overline{Y}\,\overline{Z}$	$\overline{W}X\overline{Y}Z$	$\overline{W}XYZ$	$\overline{W}XY\overline{Z}$
11	$WX\overline{Y}\,\overline{Z}$	$WX\overline{Y}Z$	$WXYZ$	$WXY\overline{Z}$
10	$W\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	$W\overline{X}\,\overline{Y}Z$	$W\overline{X}YZ$	$W\overline{X}Y\overline{Z}$

WX \ YZ	00	01	11	10
00	$W+X+Y+Z$	$W+X+Y+\overline{Z}$	$W+X+\overline{Y}+\overline{Z}$	$W+X+\overline{Y}+Z$
01	$W+\overline{X}+Y+Z$	$W+\overline{X}+Y+\overline{Z}$	$W+\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$	$W+\overline{X}+\overline{Y}+Z$
11	$\overline{W}+\overline{X}+Y+Z$	$\overline{W}+\overline{X}+Y+\overline{Z}$	$\overline{W}+\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}$	$\overline{W}+\overline{X}+\overline{Y}+Z$
10	$\overline{W}+X+Y+Z$	$\overline{W}+X+Y+\overline{Z}$	$\overline{W}+X+\overline{Y}+\overline{Z}$	$\overline{W}+X+\overline{Y}+Z$

WX \ YZ	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

WX \ YZ	00	01	11	10
00	M_0	M_1	M_3	M_2
01	M_4	M_5	M_7	M_6
11	M_{12}	M_{13}	M_{15}	M_{14}
10	M_8	M_9	M_{11}	M_{10}

(d)最小項和最大項

積項之和(SOP)式的化簡步驟

1. 將布林函數化爲標準的積項之和

例 $f(A, B, C)$

$$= AB + A\overline{C} + B\overline{C} + A\overline{B}C$$

$$= AB(\overline{C} + C) + A\overline{C}(\overline{B} + B) + B\overline{C}(\overline{A} + A) + A\overline{B}C$$

$$= AB\overline{C} + ABC + A\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + A\overline{B}C$$

$$= AB\overline{C} + ABC + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$$

(∵ $AB\overline{C}$重複，可消去只剩一個)

2. 根據標準的積項之和(SOP式)，轉換成SOP式的數字式，即

$$f(A, B, C) = AB\overline{C} + ABC + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$$

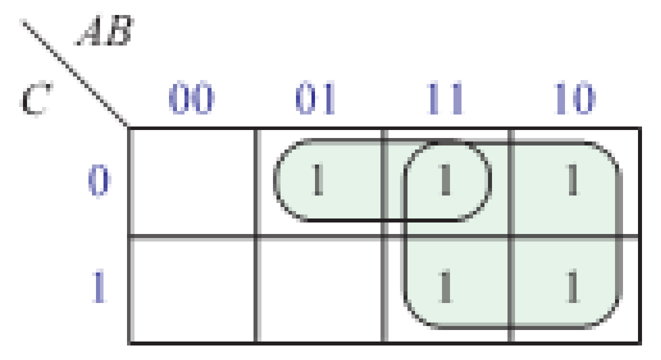
$$= \Sigma(6, 7, 4, 2, 5)$$

$$= \Sigma(2, 4, 5, 6, 7)$$ (依序寫出，便於填入方格)

3. 將SOP式的數字式中出現的數字，在卡諾圖相對應的方格內填入1，其餘的方格則全部填入0。(填入0的動作，常常省略)。

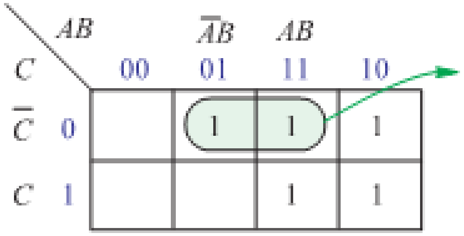
$C \backslash AB$	00	01	11	10
0	$_0$	1_2	1_6	1_4
1	$_1$	$_3$	1_7	1_5

4. 將相鄰方格中被標示爲 1 的格子，依 2^n 個數目用圓圈圈起來 (n＝1, 2, 3, …)，即圓圈內的方格數應爲 2, 4, 8, …；而畫圓圈圈有二個原則，一爲圓圈愈大愈好，即圓圈內的方格數愈多愈好，如此才能消掉更多的輸入變數；另一原則爲圓圈圈數愈少愈好，如此才能將布林函數化爲最簡(最後所得的項數才能最少)；且每一方格均可被重複使用(圈選)，直到所有標 1 的方格均被圈選完爲止。

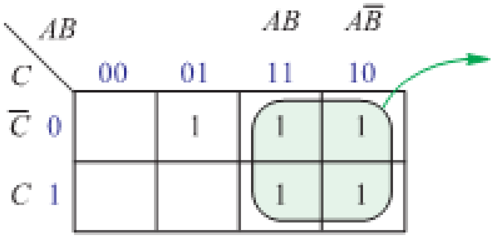


C \ AB	00	01	11	10
0		1	1	1
1			1	1

5. 將圈起來的每一組保留相同輸入變數值的變數，消去不相同輸入變數值的變數；最後再將簡化後的每一組 OR 起來，即成爲最簡的布林式。



只有 A 輸入變數值不同，故化簡爲 $B\overline{C}$



只有 A 輸入變數值('1')相同，故化簡爲 A

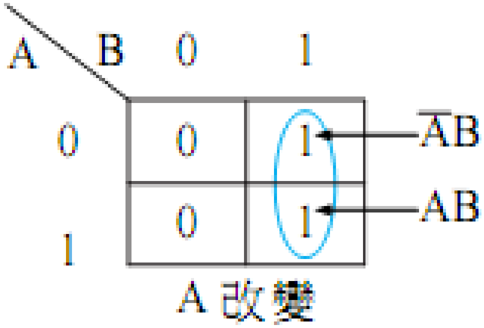
所以布林函數 $f(A, B, C) = AB + A\overline{C} + B\overline{C} + A\overline{B}C$的最簡布林式爲 $f(A, B, C) = A + B\overline{C}$

從上面的例子中，我們可以發現相鄰的兩個方格，可以消去 1 個輸入變數，相鄰的四個方格，可以消去 2 個輸入變數，而相鄰的八個方格，則可以消去 3 個輸入變數；以此類推；這也是圈要愈大、愈少的原因，如此才能獲得最簡的布林式。

範例 1

證明最小項卡諾圖中相鄰二個1，可以消去一個互補的變數。

證明

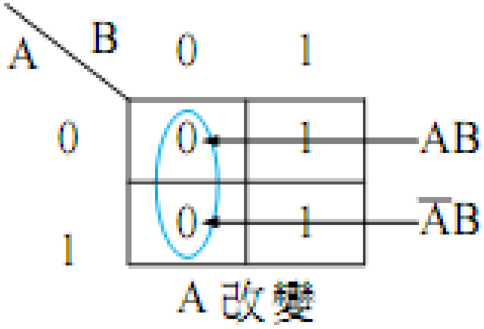


$$
\begin{aligned}
F &= \overline{A}\cdot B + A\cdot B \\
&= (\overline{A} + A)B \\
&= 1\cdot B \\
&= B
\end{aligned}
$$

範例 2

證明最大項卡諾圖中相鄰二個0，可以消去一個互補的變數。

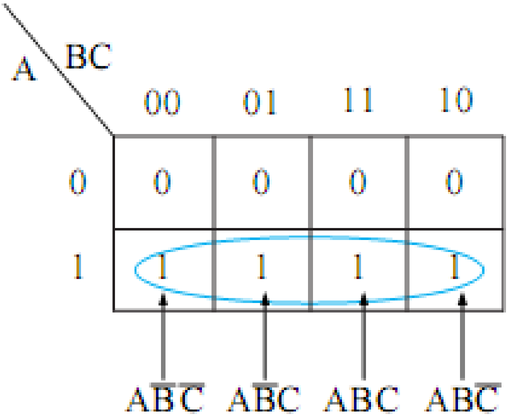
證明



$$
\begin{aligned}
F &= (A + B)\cdot(\overline{A} + B) \\
&= A\overline{A} + AB + B\overline{A} + BB \\
&= A\overline{A} + B(\overline{A} + A) + BB \\
&= 0 + B\cdot 1 + B
\end{aligned}
$$

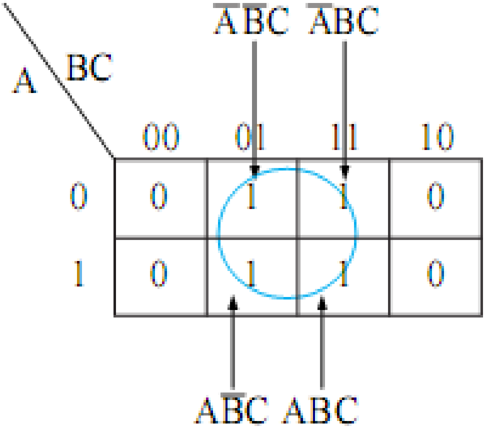
範例 3 證明最小項卡諾圖中相鄰四個1，可以消去二個互補的變數。

證明 (a)



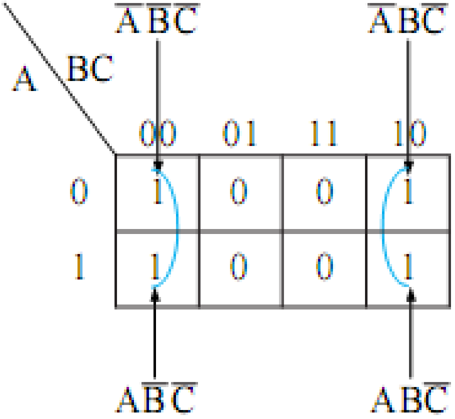
$$
\begin{aligned}
F &= A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC + AB\bar{C} \\
&= A\bar{B}\,(\bar{C} + C) + AB(C + \bar{C}) \\
&= A\bar{B} + AB \\
&= A\,(\bar{B} + B) \\
&= A
\end{aligned}
$$

(b)



$$
\begin{aligned}
F &= \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC \\
&= \bar{A}C\,(\bar{B} + B) + AC\,(\bar{B} + B) \\
&= \bar{A}C + AC \\
&= C\,(\bar{A} + A) \\
&= C
\end{aligned}
$$

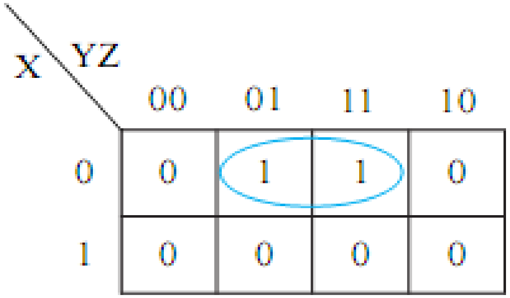
(c)



$$
\begin{aligned}
F &= \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} \\
&= \bar{A}\bar{C}\,(\bar{B} + B) + A\bar{C}\,(\bar{B} + B) \\
&= \bar{A}\bar{C} + A\bar{C} \\
&= \bar{C}\,(\bar{A} + A) \\
&= \bar{C}
\end{aligned}
$$

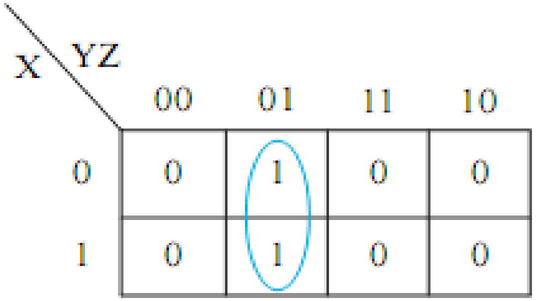
範例 1 三變數卡諾圖 1—方格的圈選例子

解



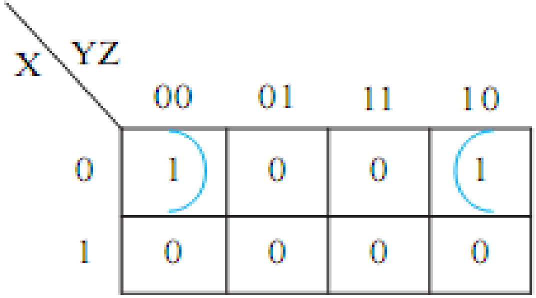
$f = \overline{X}Z$

(a)



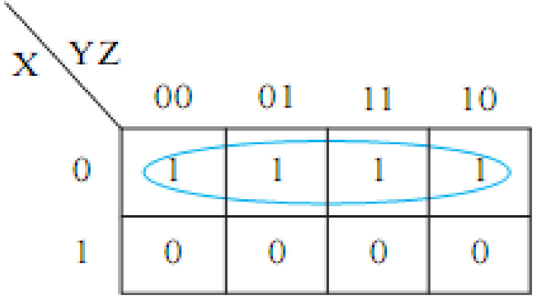
$f = \overline{Y}Z$

(b)



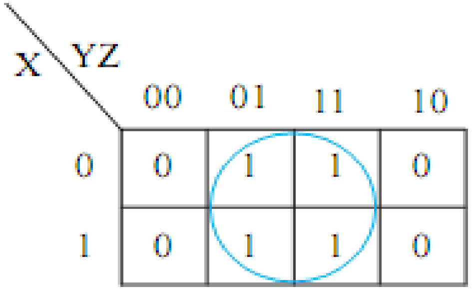
$f = \overline{X}\,\overline{Z}$

(c)

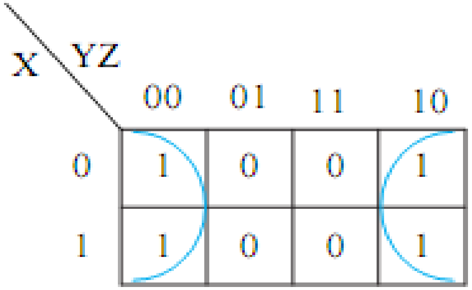


$f = \overline{X}$

(d)

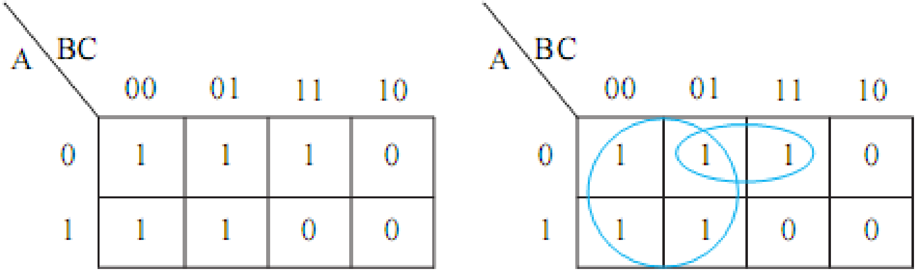


$f = Z$



$f = \overline{Z}$

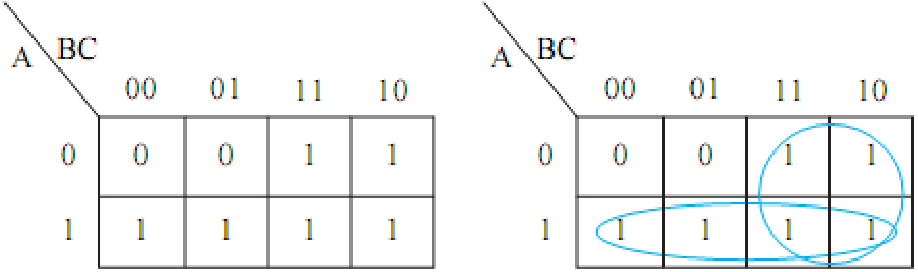
(a)



A \ BC	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	1	0	0

$F = \overline{B} + \overline{A}C$

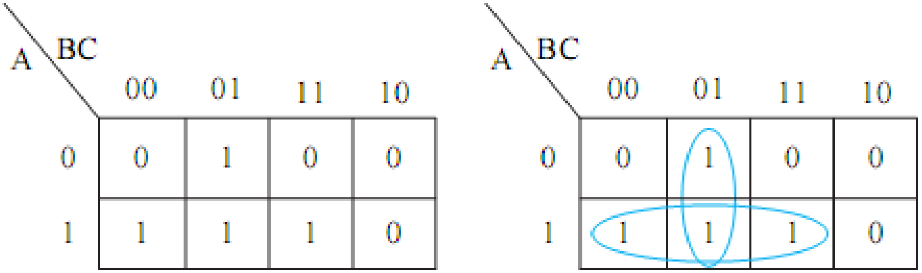
(b)



A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	1	1	1

$F = A + B$

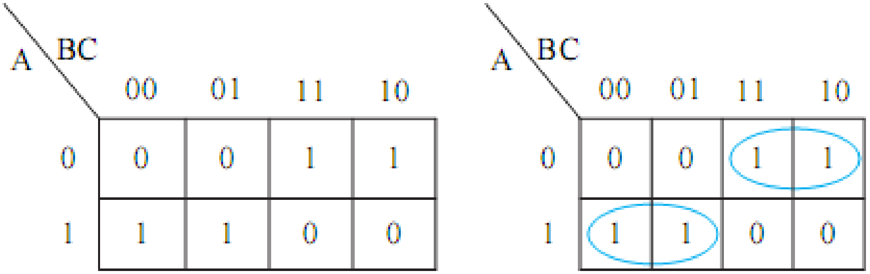
(c)



A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	1	1	1	0

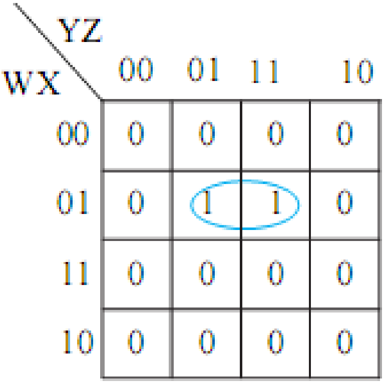
$F = A\overline{B} + \overline{B}C + AC$

(d)



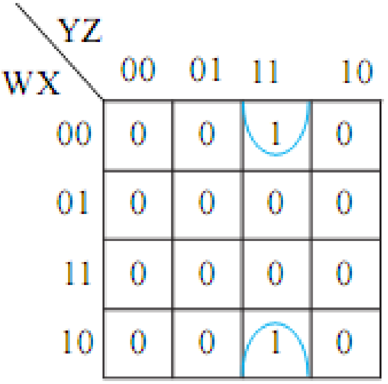
A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	1	0	0

$F = A\overline{B} + \overline{A}B$



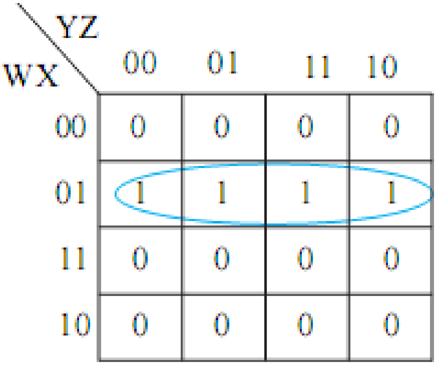
YZ WX	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

$F = \overline{W}XZ$



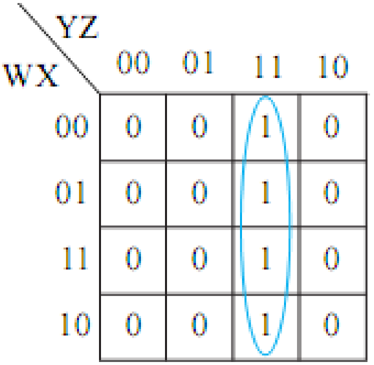
YZ WX	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	1	0

$F = \overline{X}YZ$



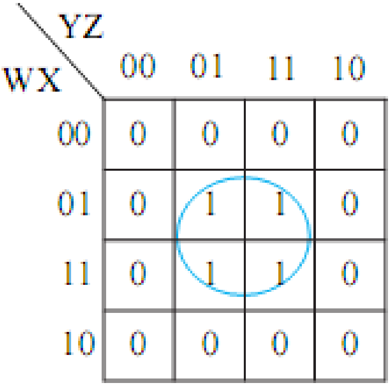
YZ WX	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

$f = \overline{W}X$



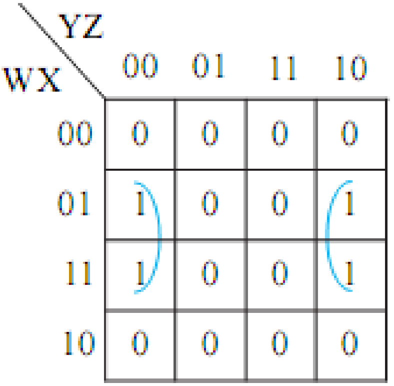
YZ WX	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	1	0

$f = YZ$



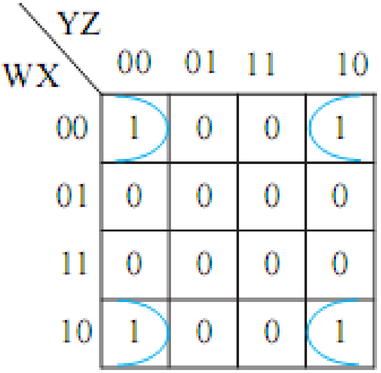
YZ WX	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	0	0	0	0

$f = XZ$



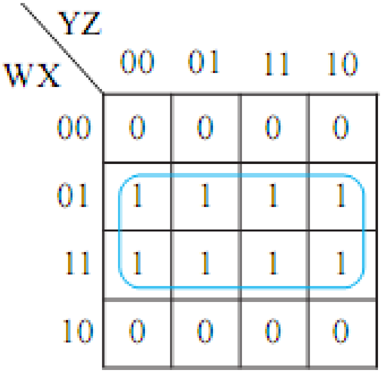
YZ WX	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	0	0	0	0

$f = X\overline{Z}$



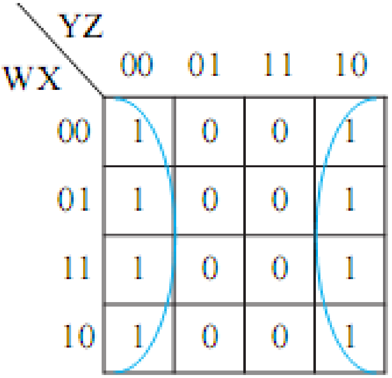
YZ WX	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

$f = \overline{X}\,\overline{Z}$



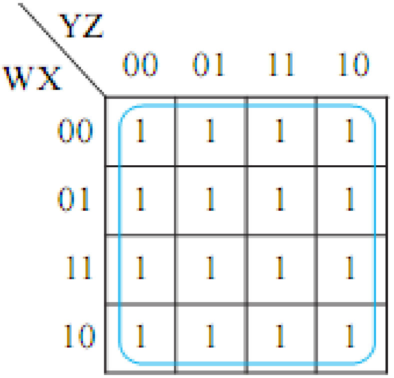
YZ WX	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	0	0

$f = X$



YZ WX	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$f = \overline{Z}$



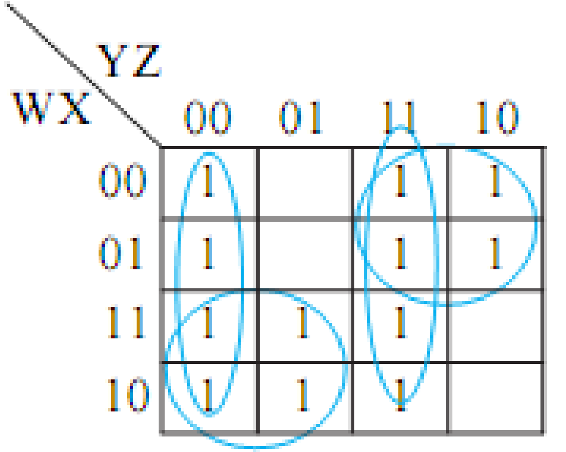
YZ WX	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

$f = 1$

範例 4 四變數卡諾圖化簡之例子。

解

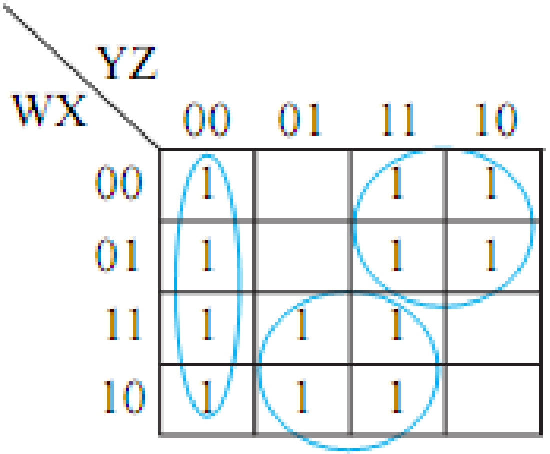
(1)



WX \ YZ	00	01	11	10
00	1		1	1
01	1		1	1
11	1	1	1	
10	1	1	1	

$f = \overline{Y}Z + W\overline{Y} + YZ + \overline{W}Y$

(a)不良的圈選方式

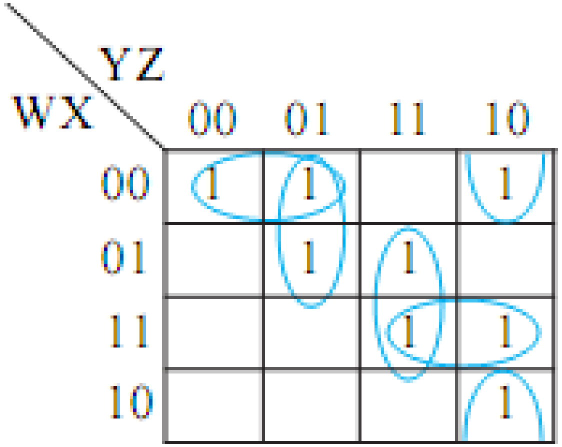


WX \ YZ	00	01	11	10
00	1		1	1
01	1		1	1
11	1	1	1	
10	1	1	1	

$f = \overline{Y}\,\overline{Z} + WZ + \overline{W}Y$

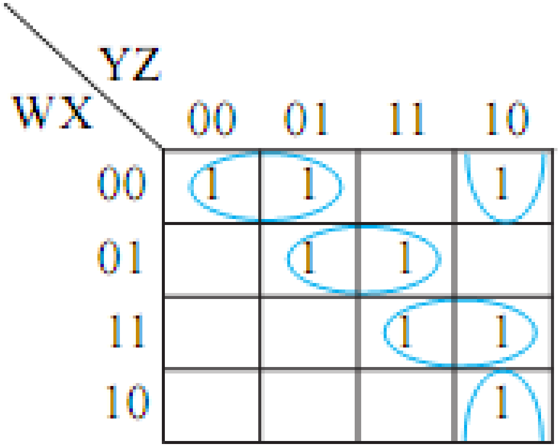
(b)良好的圈選方式

(2)



$f=\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}+\overline{W}\,\overline{Y}Z+XYZ+WXY+\overline{X}YZ$

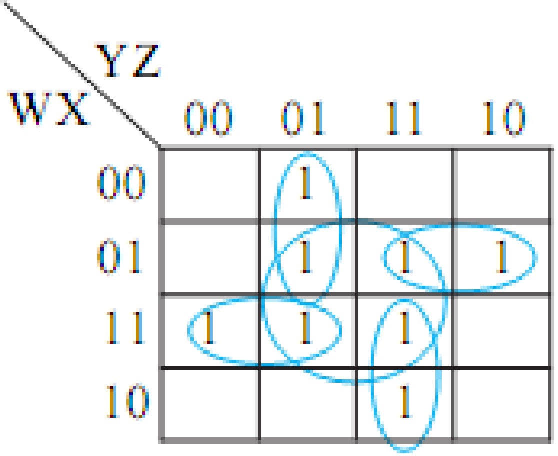
(a)不良的圈選方式（因為所需積項不是最少）



$f=\overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}+\overline{W}XZ+WXY+\overline{X}YZ$

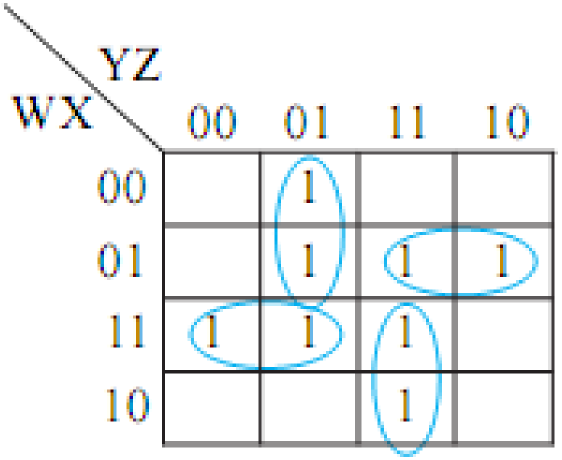
(b)良好的圈選方式

(3)



$f=\overline{W}\,\overline{Y}Z+\overline{W}XY+WYZ+WX\overline{Y}+XZ$

(a)不良的圈選方式（非最簡式）



$f=\overline{W}\,\overline{Y}Z+\overline{W}XY+WYZ+WX\overline{Y}$

(b)良好的圈選方式（最簡式）

範例 6 請利用卡諾圖化簡

$$f(A,B,C,D) = A\overline{B}C\overline{D} + ACD + BCD + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}\,\overline{D}$$

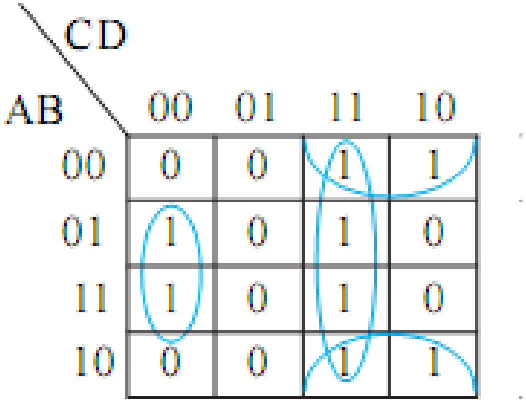
解

$$f(A,B,C,D) = \underbrace{(1010)}_{10} + \underbrace{(1\times11)}_{11,15} + \underbrace{(\times111)}_{7,15} + \underbrace{(001\times)}_{2,3} + \underbrace{(0011)}_{3} + \underbrace{(0010)}_{2} + \underbrace{(0100)}_{4} + \underbrace{(1100)}_{12}$$

$$= \Sigma\,(2,3,4,7,10,11,12,15)$$

其中 "x" 可以爲 0 或 1，因此其卡諾圖如下圖所示。

化簡得 $f(A,B,C,D) = CD + \overline{B}C + B\overline{C}\,\overline{D}$



AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	0	1	0
11	1	0	1	0
10	0	0	1	1

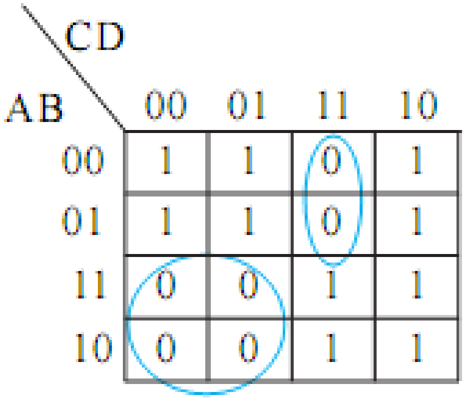
三、最大項化簡法

1. 畫出該最大項之積對應的卡諾圖。
2. 圈選卡諾圖中的0，原則和最小項化簡方法相同。
3. 利用AND運算將每個圈選所代表的和項組合起來。

範例 1 利用卡諾圖化簡

$$f(A,B,C,D)=(A+B+\overline{C}+\overline{D})(A+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})(\overline{A}+B+C+D)(\overline{A}+B+C+\overline{D})(\overline{A}+\overline{B}+C+D)(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})$$

解



AB CD	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	1
11	0	0	1	1
10	0	0	1	1

$$f(A,B,C,D)=(\overline{A}+C)(A+\overline{C}+\overline{D})$$

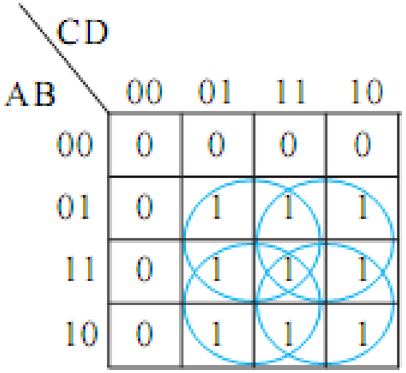
範例 2 請用卡諾圖化簡下式成最簡

$f(A,B,C,D) = \Sigma(5,6,7,9,10,11,13,14,15)$

解

(1) 圈選 1—方格，並加以化簡。函數 f 的最簡 SOP 表示式爲

$f(A,B,C,D) = BD + BC + AD + AC$

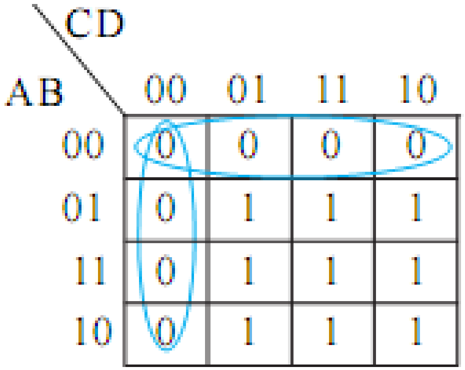


AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	1

(2) 圈選 0—方格，並加以化簡。函數 f 的最簡 POS 表示式爲

$f(A,B,C,D) = (A + B)(C + D)$

因爲化簡 0—方格所得的項數最少，所以，此爲函數 f 的最簡表式。



AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	1

不在意項

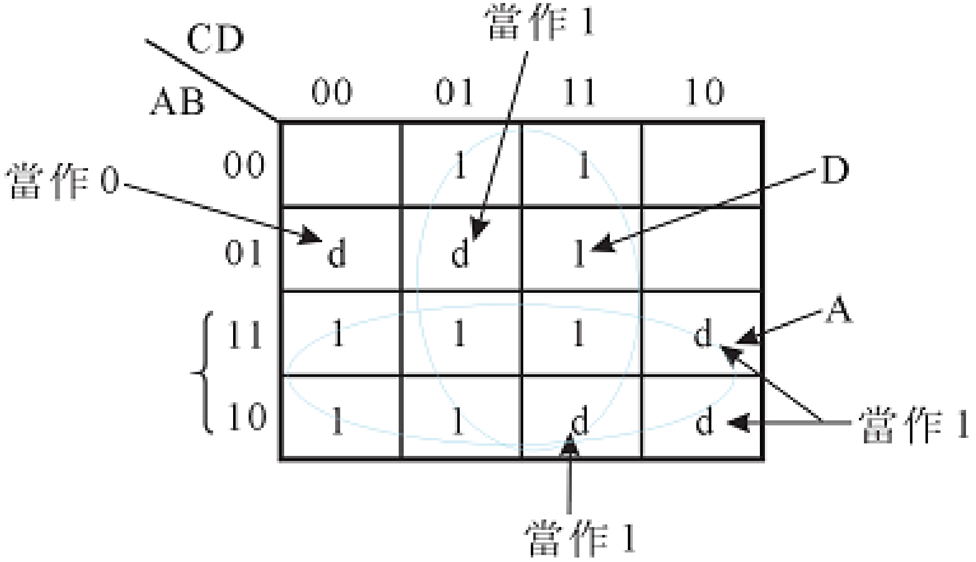
在某些邏輯電路的應用中，並非所有輸入狀態皆有其對應的輸出狀態；也就是說，某些輸入狀態不可能出現在此電路的輸入端，所以對這些輸入狀態而言，其對應的輸出狀態可以是 0（低電位）或 1（高電位），這種輸入狀態所對應的輸出狀態則稱爲未確定狀態（Don't care condition），或不在意項。

範例 1 請求下列布林函數的最簡式

$$f(A,B,C,D) = \Sigma(1,3,7,8,9,12,13,15) + \Sigma_d(4,5,10,11,14)$$

解 卡諾圖如圖 4-6 所示。爲求最簡的表示式，將 Σ（5,10,11,14）等四個不在意項假設爲 1，化簡後得

$$f(A,B,C,D) = A + D$$

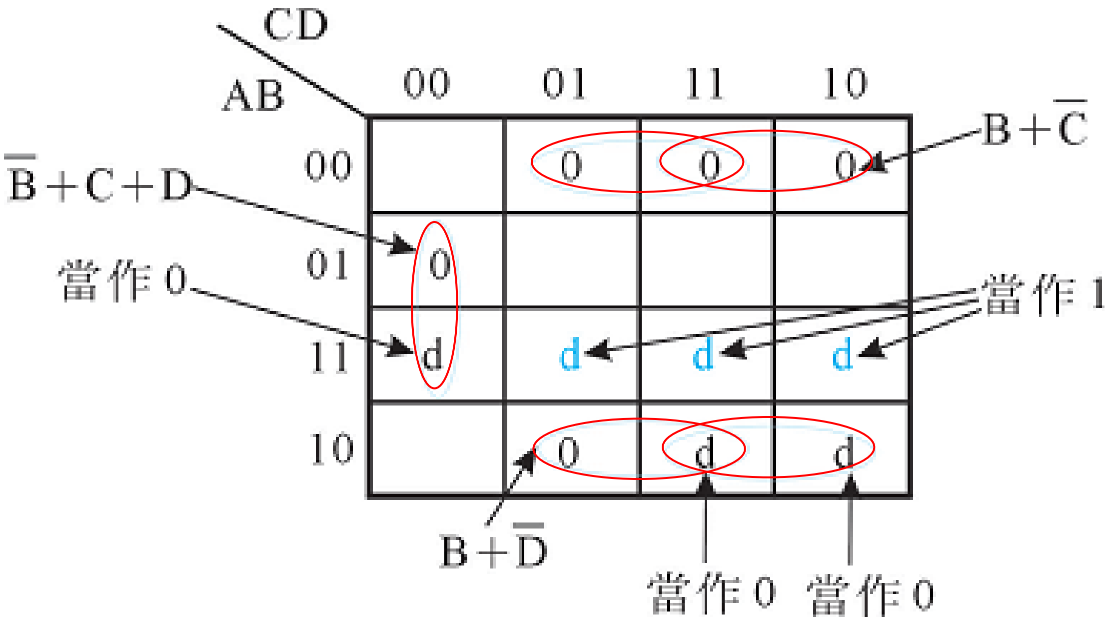


範例 2　求下列布林函數的最簡式

$f(A,B,C,D)=\Pi(1,2,3,4,9)+\Pi_d(10,11,12,13,14,15)$

解：卡諾圖如圖 4-7 所示。爲求最簡的表示式，將Π（10,11,12）等三個不在意項假設爲 0，化簡後得

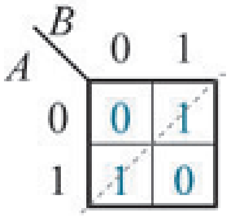
$f(A,B,C,D)=(B+\overline{C})(B+\overline{D})(\overline{B}+C+D)$



卡諾圖特殊狀況的化簡

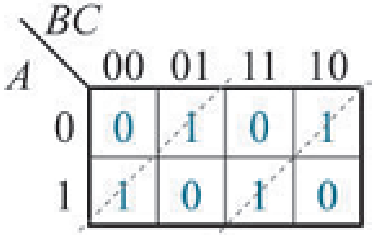
當依布林函數的SOP式或POS式填入卡諾圖後，發現所有的1或0都沒有相鄰，此為互斥或閘（XOR）或是反互斥或閘（XNOR）的卡諾圖。

(1) 奇數個1輸入時，輸出皆為1的情況……互斥或閘的特性



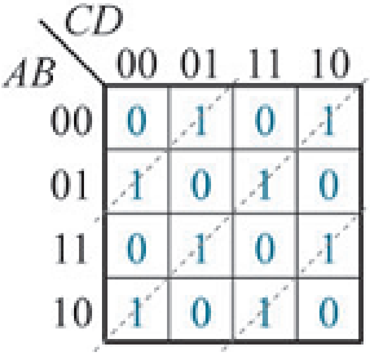
A\B	0	1
0	0	1
1	1	0

(a) $f = A \oplus B$



A\BC	00	01	11	10
0	0	1	0	1
1	1	0	1	0

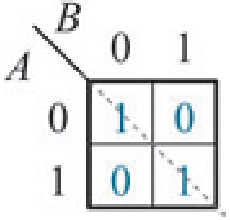
(b) $f = A \oplus B \oplus C$



AB\CD	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	1	0	1	0
11	0	1	0	1
10	1	0	1	0

(c) $f = A \oplus B \oplus C \oplus \mathrm{D}$

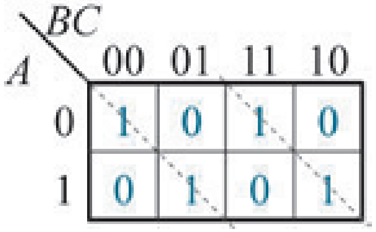
(2) 偶數個1輸入時，輸出皆為1的情況……反互斥或閘的特性



A\B	0	1
0	1	0
1	0	1

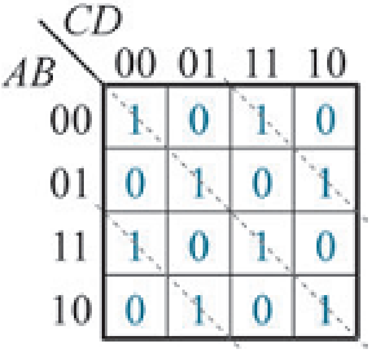
(a) $f = A \odot B$

$= \overline{A \oplus B}$



A\BC	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

(b) $f = \overline{A \oplus B \oplus C}$



AB\CD	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	0	1	0	1
11	1	0	1	0
10	0	1	0	1

(c) $f = \overline{A \oplus B \oplus C \oplus D}$

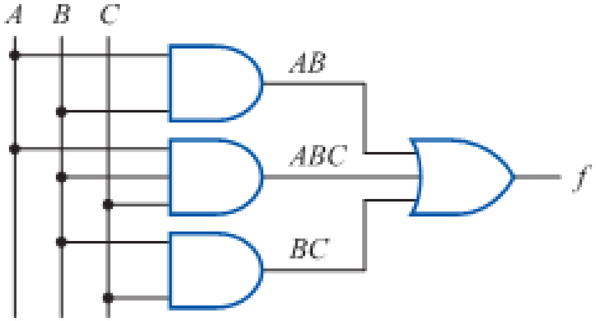
積項之和(SOP)式布林代數的實現

例題 14

試將$f(A, B, C) = AB + ABC + BC$布林函數，以AND-OR閘組合實現。

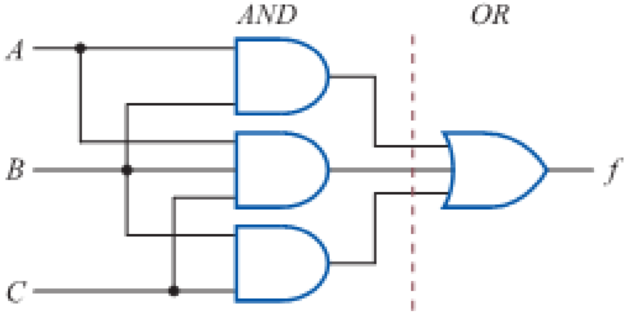
解

(1)由於$f(A, B, C) = AB + ABC + BC$的布林函數爲 SOP 式的形式，所以可以由AND-OR閘來組合完成，其組合邏輯電路如下：



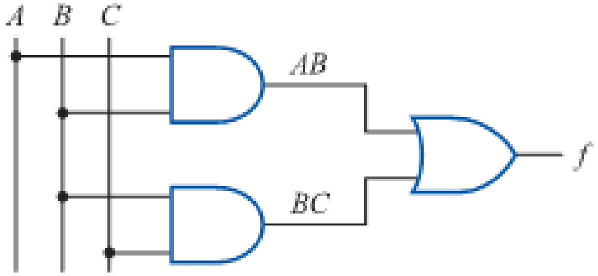
圖(1)

或



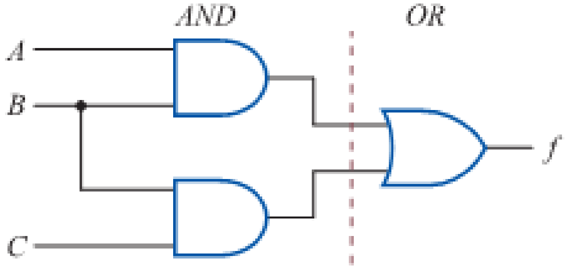
圖(2)

(2)若利用卡諾圖簡化$f(A, B, C) = AB + ABC + BC$，可得$f(A, B, C) = AB + BC$，所以其組合邏輯電路如下：



圖(3)

或

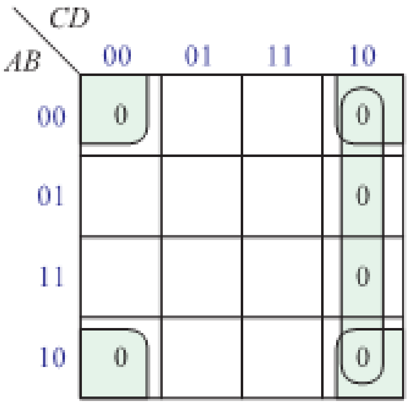


圖(4)

和項之積(POS)式布林代數的實現

例題 16

試將 $f(A, B, C, D)=(\overline{A}+\overline{C}+D)(A+\overline{C}+D)(A+B+C+D)(\overline{A}+B+C+D)$布林函數，以OR-AND閘組合實現。



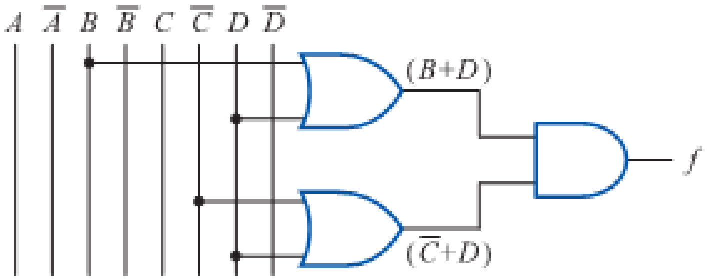
AB \ CD	00	01	11	10
00	0			0
01				0
11				0
10	0			0

解

(1)由於布林函數若沒有簡化，所組合出來的邏輯電路將會非常龐大(尤其是輸入變數增多時，將更爲明顯)，所以先利用卡諾圖簡化，即

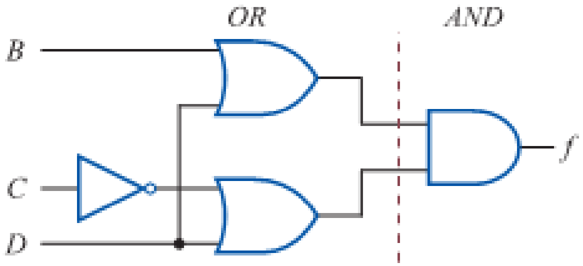
$$\begin{aligned} f(A, B, C, D) &= (\overline{A}+\overline{C}+D)(A+\overline{C}+D) \\ &\quad \cdot (A+B+C+D)(\overline{A}+B+C+D) \\ &= (B+D)(\overline{C}+D) \end{aligned}$$

(2)依最簡 POS 式獲得的組合邏輯電路如下：



或

圖(1)

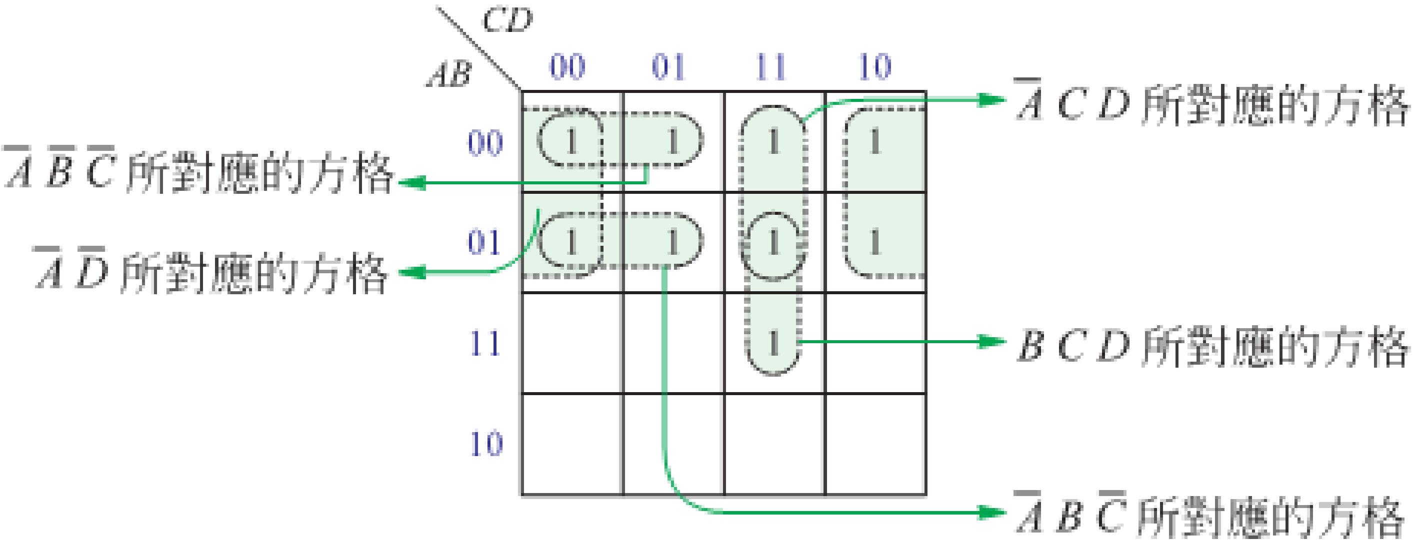


圖(2)

例題 17

試將$f(A, B, C, D) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,CD + \overline{A}\,\overline{D} + BCD + \overline{A}\,B\,\overline{C}$布林函數，以OR-AND閘組合實現。

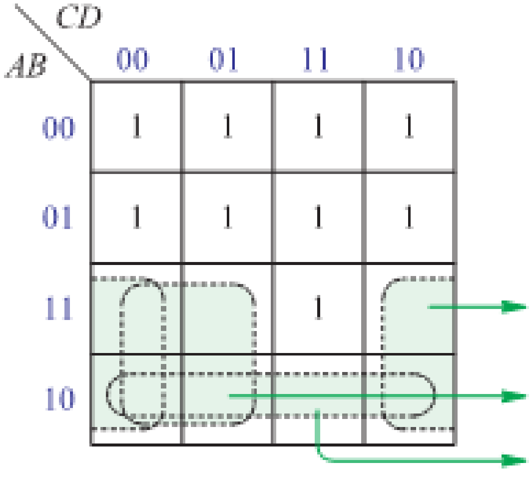
解 (1)依題意分別將各項填入相對應的卡諾圖方格中。



【下頁續】

(2)由於需以OR-AND閘組合完成布林函數，所以圈選卡諾圖中未填入 1 的方格(即表示該方格爲 0)，以獲得最簡POS式，即

$$f(A, B, C, D) = (\overline{A} + D)(\overline{A} + D)(\overline{A} + B)$$



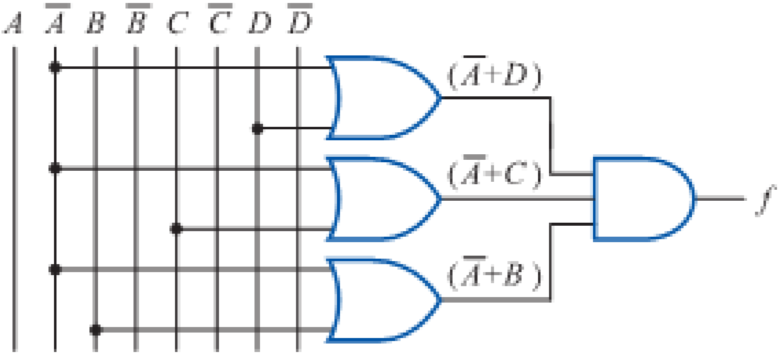
AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11			1	
10				

只有AD輸入變數值("10")相同，故化簡爲$(\overline{A}+D)$

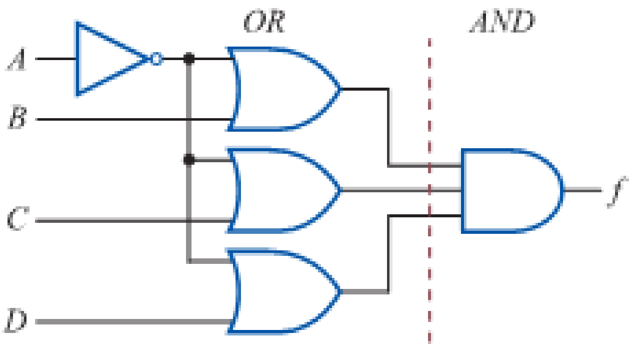
只有AC輸入變數值("10")相同，故化簡爲$(\overline{A}+C)$

只有AB輸入變數值("10")相同，故化簡爲$(\overline{A}+B)$

(3)依最簡 POS 式獲得的組合邏輯電路如下：



或



圖(1)

圖(2)