布林代數之運算優先順序

求布林代數之運算值時，其邏輯運算順序為：

(1) NOT ($-$)、(2) AND($\cdot$)、(3) OR($+$)

AND 運算

常用點(‧)或不加任何運算子(operator)來表示執行AND運算。例如：$X \cdot Y = Z$ 或 $XY = Z$ 都讀作『X及Y 等於 Z』；AND的意義是若且唯若(if and only if)，所以AND運算也稱為邏輯的乘法運算，即是 X 與 Y 同時等於1時，Z 才為1；否則，Z 都等於0；以下為AND的四種運算狀況：

1. $0 \cdot 0 = 0$
2. $0 \cdot 1 = 0$
3. $1 \cdot 0 = 0$
4. $1 \cdot 1 = 1$

OR 運算

此一運算符號是一個加法符號(＋)，也稱爲邏輯的加法運算；例如：$X+Y=Z$，讀作『X 或 Y 等於 Z』，也就是若 X 與 Y 二者有任一爲 1(包括同時均爲 1)時，Z 即爲 1；反之，若 X 與 Y 同時均爲 0 時，則 Z 爲 0，以下爲 OR 的四種運算狀況：

1. $0+0=0$
2. $0+1=1$
3. $1+0=1$
4. $1+1=1$

NOT 運算

在變數的上方劃一橫槓即表示爲NOT運算，也稱爲邏輯補數或反相運算；例如：$\overline{X}=Z$，讀作『X 的 bar 等於 Z』，即表示 Z 是 X 的反相或補數，也就是說，若 $X=1$，則 $Z=0$；反之，若 $X=0$，則 $Z=1$。另外，在外國作者所寫的原文書上，常以 X' 表示 $\overline{X}$，又如 $(A+B)'$ 表示 $\overline{A+B}$ 及 $(AB)'$ 表示 $\overline{AB}$ 等；以下爲 NOT 的兩種運算狀況：

1. $\overline{0}=1$
2. $\overline{1}=0$

布林代數的假說

假說(postulate)是一種代數結構的基本原理(axiom)，是不用證明的。布林代數的假說如下：

1. 同質性(dentity properties)

(a) $X + 0 = X$　X=0，0+0=0　X=1，1+0=1

(b) $X \cdot 1 = X$　X=0，0・1=0　X=1，1・1=1

2. 互補性(complement properties)

(a) $X + \overline{X} = 1$　X=0，$0+\overline{0}=0+1=1$　X=1，$1+\overline{1}=1+0=1$

(b) $X \cdot \overline{X} = 0$　X=0，$0 \cdot \overline{0}=0 \cdot 1=0$　X=1，$1 \cdot \overline{1}=1 \cdot 0=0$

3. 交換律(commutative laws)

(a) $X + Y = Y + X$

(b) $XY = YX$

4. 分配律(distribution laws)

(a) $X(Y + Z) = XY + XZ$

(b) $X + YZ = (X + Y)(X + Z)$

以上的四項假說，我們發現一項很有趣的現象——在(a)或(b)的代數表示式中，只要將OR和AND運算符號互換，並且以0代1，以1換0，即可得到另外一代數表示式，此種現象稱為布林代數的對偶(duality)原理。

布林代數的基本定理

1. 等冪律 (a) $X + X = X$ (b) $X \cdot X = X$
2. 邊界定理 (a) $X + 1 = 1$ (b) $X \cdot 0 = 0$
3. 自補律 (a) $\overline{\overline{X}} = X$
4. 結合律 (a) $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ (b) $X(YZ) = (XY)Z$
5. 吸收律 (a) $X + XY = X$ (b) $X(X + Y) = X$

笛摩根第一定理

如圖 4-2 所示是一個兩輸入端的反或閘(NOR)，其布林式為 $f=\overline{A+B}$，而表 4-1 則為其眞值表(NOR 部份已在 3-4 節中介紹)。

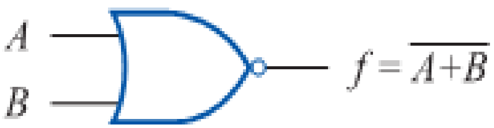


圖 4-2　NOR 閘符號

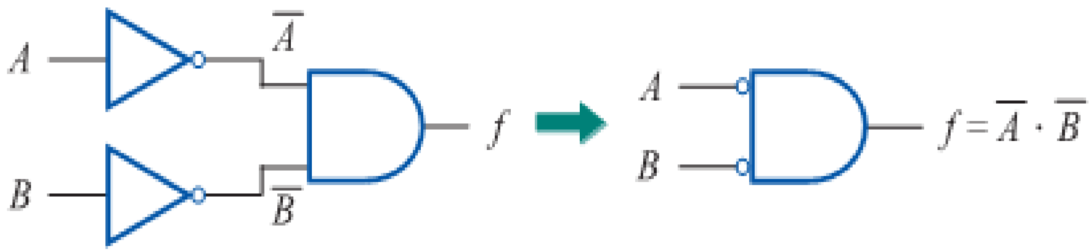


圖 4-3　輸入端先反相的及閘

表 4-1　NOR 閘眞值表

A	B	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

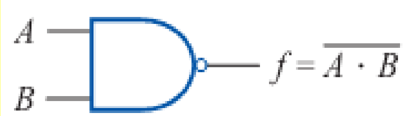
表 4-2　圖 4-3 的眞值表

A	B	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

笛摩根第二定理

笛摩根第二定理的證明類似於第一定理，即反及閘(NAND)的眞值表與輸入端先反相再經或閘的組合電路之眞值表完全一樣，如圖 4-5(b)與圖 4-6(b)所示，所以笛摩根第二定理爲：當輸入變數作“及”運算後再經反相器，相當於NAND運算，等於輸入變數先個別反相後再作“和”運算，若用式子表示則爲

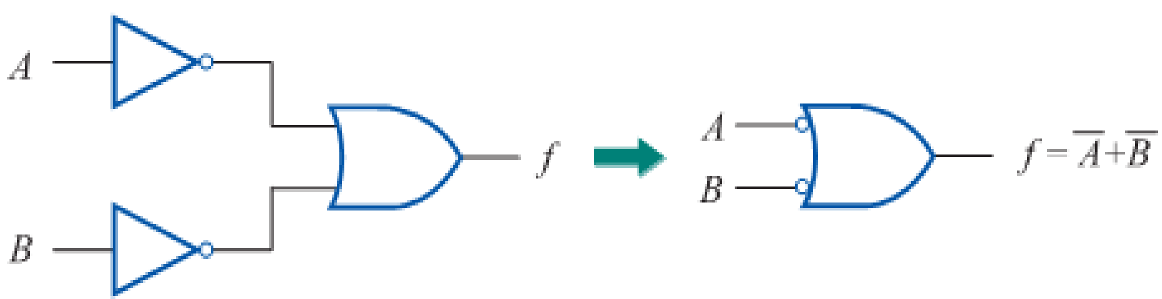
$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$



(a) 反及閘的符號

A	B	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(b) 反及閘的眞值表



(a) 電路

A	B	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(b) 眞值表

試求 $A+\bar{A}+B\cdot\bar{B}+C$ 之結果為何？

試簡化 $x+y+\bar{x}=$ ？

試簡化 $x(y+z)\bar{x}+w$ 【w】

試簡化 $\bar{A}AB+BCD$

試簡化 $y=A\bar{B}+A\bar{B}\,\bar{C}D$ 【AB’】

試化簡 $y=AB(ABC+\bar{A}BC)+AB\bar{C}$ 【AB】

試簡化 $f(x,y)=(x+y)(x+\bar{y})$ 【x】

試簡化 $f(A,B,C)=A(A+\bar{B}+C)(A+B+\bar{C})$ 【A】

試簡化 $y=(A+B)(A+B+\bar{C})(A+D)$ 【A+BD】

試完成下列布林代數化簡

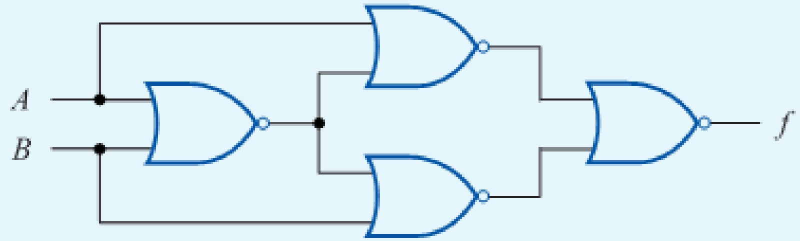
(1) $f(A,B)=\overline{AB}+A\bar{B}$ 【A’+B’】

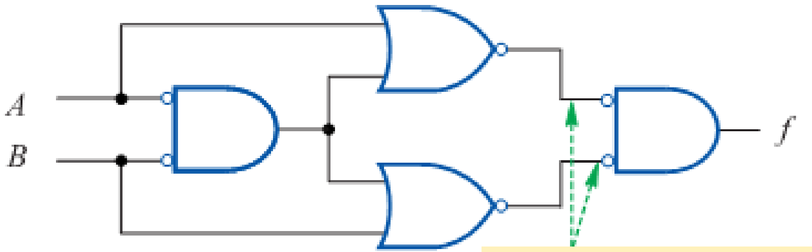
(2) $f(x,y,z)=xy+\overline{\bar{x}+\bar{y}+xz}$ 【XY】

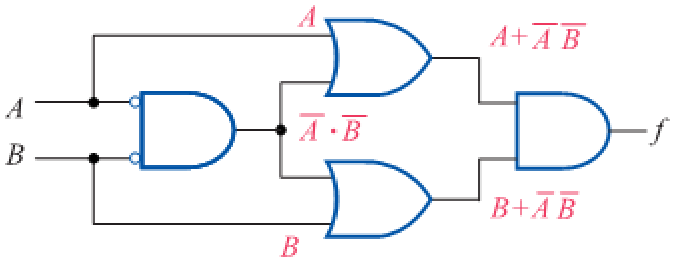
試簡化布林代數式 $f=\bar{A}\,\overline{\bar{A}BD}C+\bar{A}BC\bar{D}+A\bar{B}C$ 【B’C+A’CD’】

多層的 NOR 閘邏輯電路分析

試分析簡化圖(1)的電路，並寫出其輸出布林函數

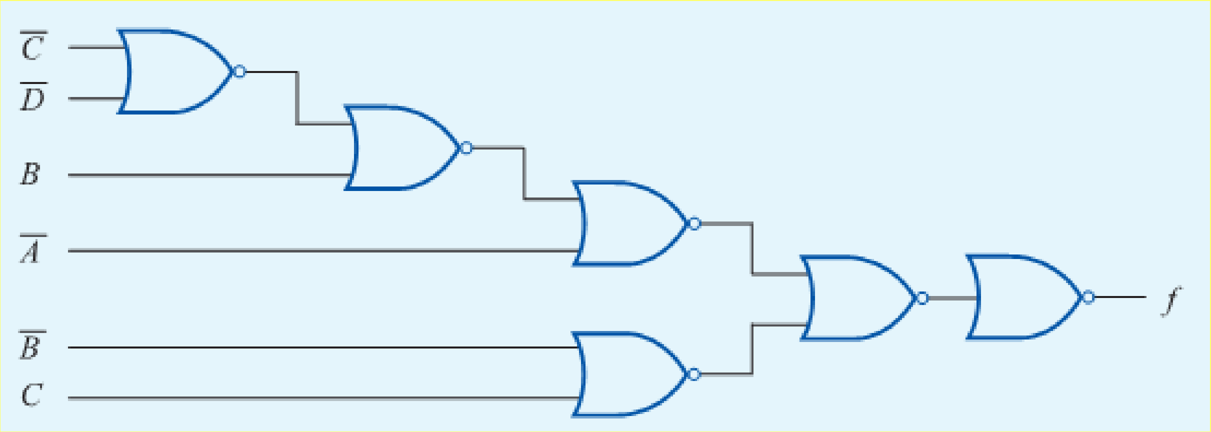


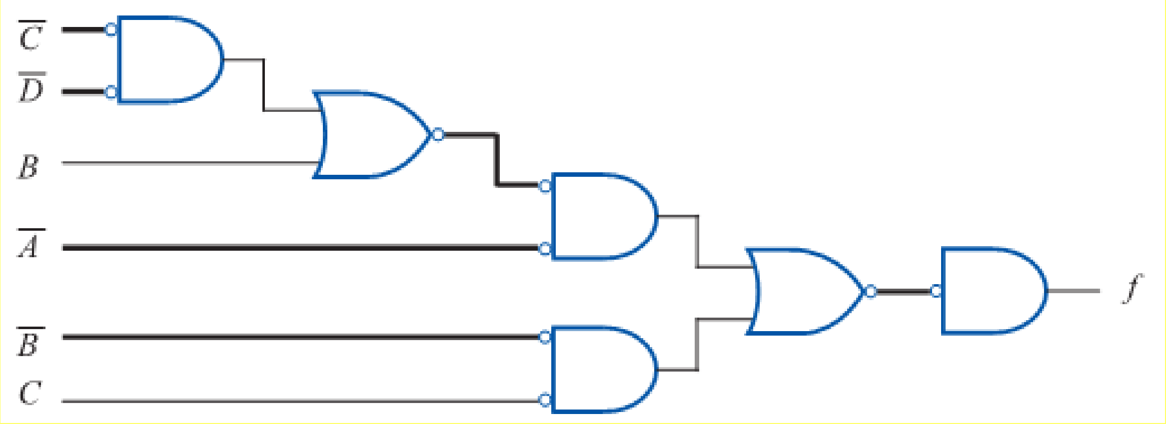


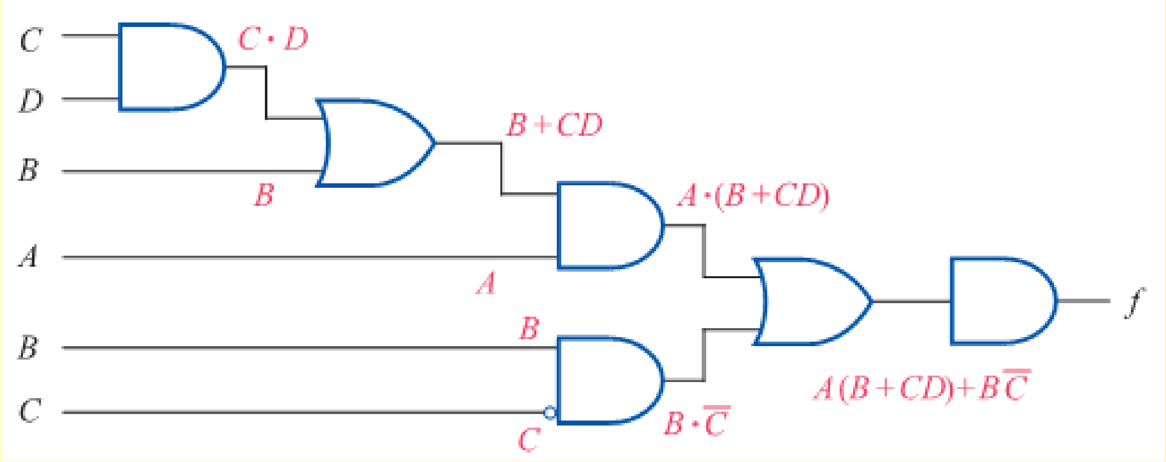


所以該電路的輸出布林函數 f 爲

$$
\begin{aligned}
f &= (A+\overline{A}\,\overline{B})(B+\overline{A}\,\overline{B}) \\
&= A\cdot B + A\cdot\overline{A}\,\overline{B} + B\cdot\overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}\cdot\overline{A}\,\overline{B} \\
&= AB + \overline{A}\,\overline{B} \\
&= A \odot B
\end{aligned}
$$

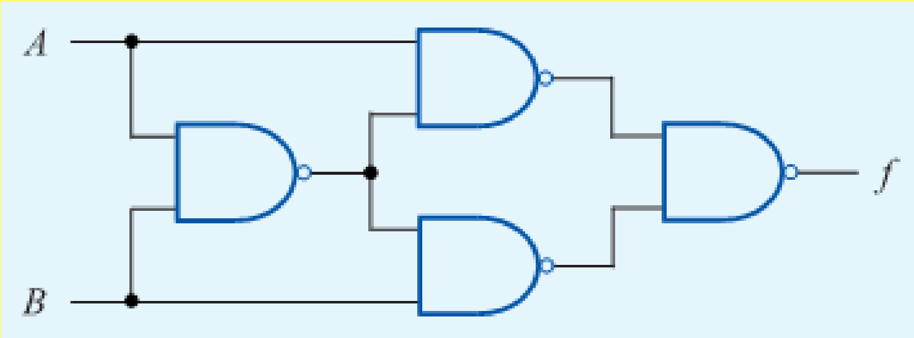


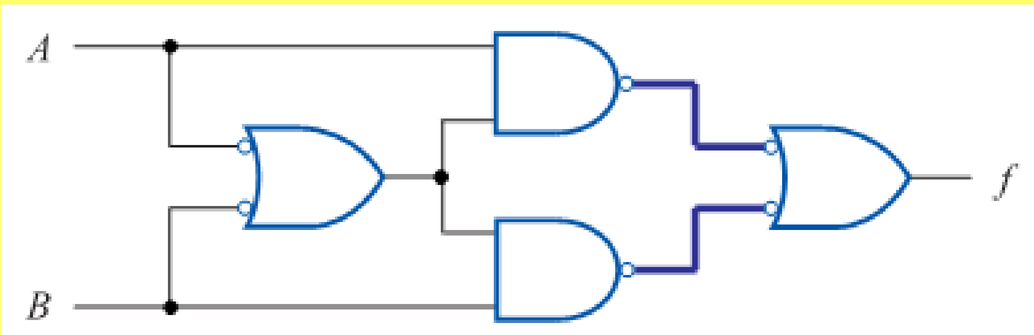


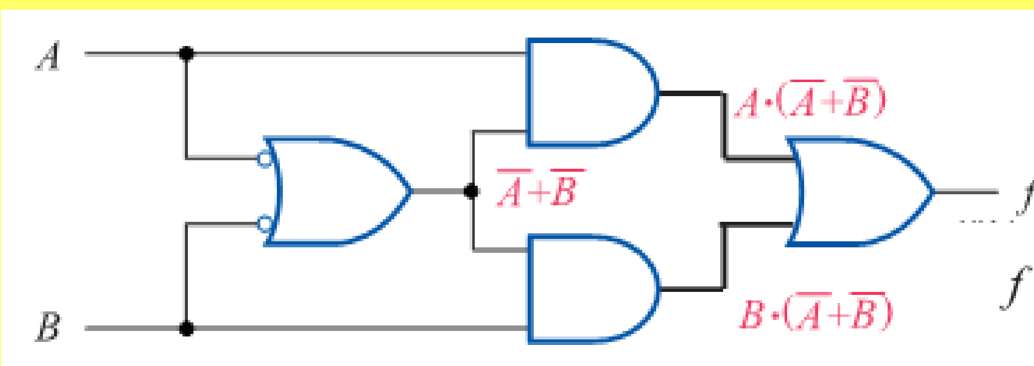


輸出端 f 的布林函數爲

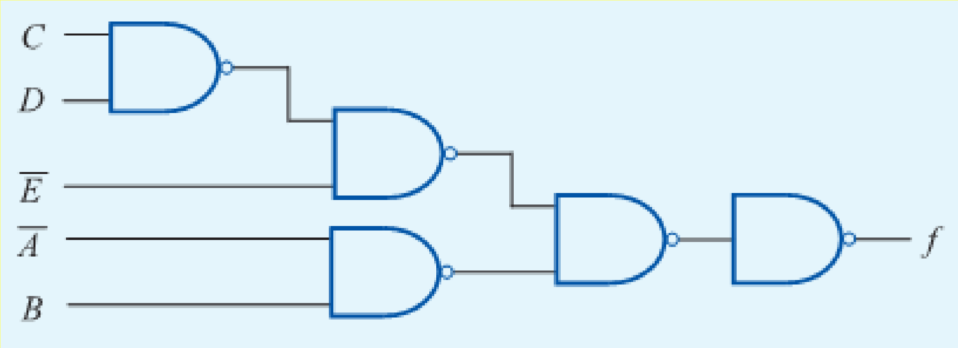
$$f = A(B + CD) + B\overline{C}$$
$$= AB + ACD + B\overline{C}$$

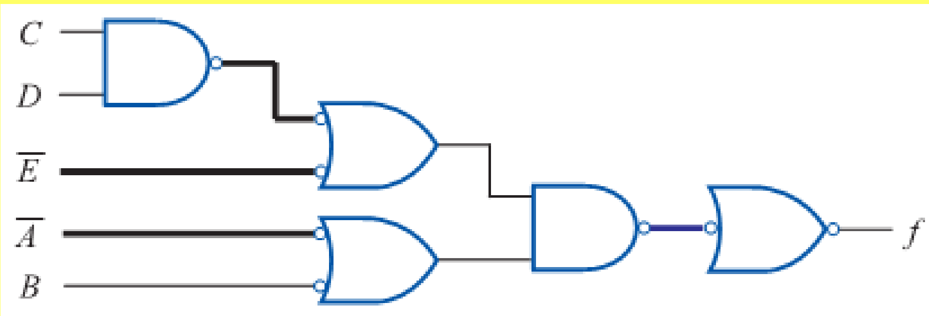


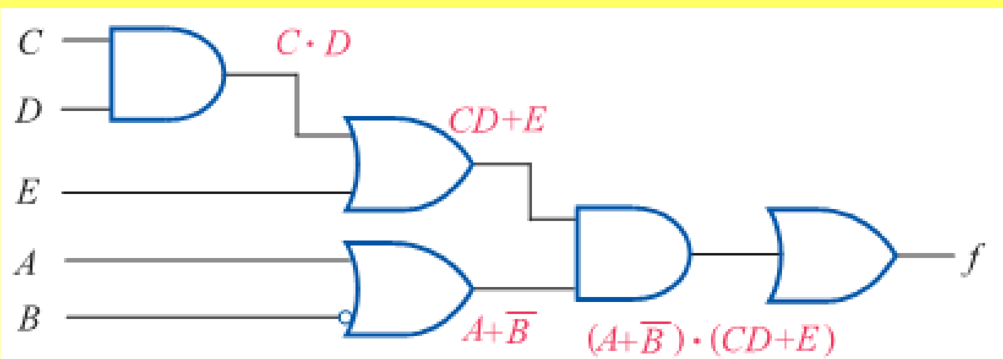




$$
\begin{aligned}
f &= A(\overline{A} + \overline{B}) + B(\overline{A} + \overline{B}) \\
&= A \cdot \overline{A} + A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B + B \cdot \overline{B} \\
&= A\overline{B} + \overline{A}B \\
&= A \oplus B
\end{aligned}
$$







輸出端 f 的布林函數爲

$$f = (A + \overline{B}) \cdot (CD + E)$$

$$= (A + \overline{B})(CD + E)$$