

## 平面幾何

吳金聰

屏東縣復興國小

國立屏東教育大學兼任助理教授

「幾何」一般人認為是 geometry 的英譯，源自於拉丁文的「geometria」，但原意取自於希臘文的「測量土地」，是一門研究形狀、立體和量度的學問（趙文敏，1992）。在九年一貫數學課程中，幾何是五大數學內容主題之一（教育部，2003，2008），可見其在國小數學課程中的重要性。國小幾何課程可分二度（維）空間的「平面幾何」與三度（維）空間的「立體幾何」，本文只陳述平面幾何。

有關幾何知識的學習研究，最有名的要算是荷蘭教育學家 van Hiele 夫婦的幾何思維層次。van Hiele 夫婦研究發現學生學習幾何時的思維歷經五個層次。由於其研究受世人重視，因此，一般的國小數學教材安排也受這五個層次的影響，即使是九年一貫課程綱要也不例外。因此，下文先陳述 van Hiele 的幾何研究，再以平面幾何數學知識在 97 年修訂版的九年一貫課程綱要（教育部，2008）（以下簡稱 97 綱要，而現行課程為 92 綱要）中，出現的順序和 van Hiele 的幾何層次，探討這些數學知識及其在各年級的教學重點。

### 一、van Hiele 的學童幾何思考層次

van Hiele 認為學童的幾何思考包含五個層次（有的學者採用 0~4 層次，有的學者採用 1~5 層次，本研究採用後者），每一層次都有其發展特徵（吳德邦，2000；國立編譯館，1999a；劉好，1994；劉秋木，1996；Van de Walle, 2001/2005）：

#### （一）層次一：視覺期（visualization）或視覺的（visual）層次

在此層次的學生，藉由視覺，依據圖形的整體外觀特徵，以「看起來像」對圖形進行辨識與命名（Van de Walle, 2001/2005）。此期的學習活動可讓學生進行分類、造形、堆疊、描繪、著色等活動獲得概念（國立編譯館，1999a）。

## （二）層次二：分析期（analysis）或描述的（descriptive）層次

此層次的學生具辨別圖形特徵的能力（吳德邦，2000），開始分析幾何的概念，透過觀察和實際驗證的方法，分析圖形的組成要素及圖形性質（劉好，1994），學生能辨識各圖形的構成要素和要素間的關係（劉秋木，1996），也能對圖形進行分類，但難以分辨彼此的包含關係（Van de Walle, 2001/2005）。

## （三）層次三：非形式演繹期（informal deduction）或理論的（theoretical）層次

學生已具備發展對形狀性質關係瞭解的能力（Van de Walle, 2001/2005），能建立性質之間的關係及圖形之間的關係（劉好，1994）。此層次可要求學生對圖形下一精確簡要的定義，學生能理解圖形間的包含關係（吳德邦，2000），也能進行簡單的演繹推理與證明（劉秋木，1996）。

## （四）層次四：形式演繹（formal Deduction）或形式邏輯的（formal logic）層次

此層次的學生能經由抽象推理證明各種幾何問題，也知道證明的方法不只一種（吳德邦，2000；劉好，1994）。學生能瞭解幾何物件間的性質關係（Van de Walle, 2001/2005），也能瞭解未定義名詞、公設、定理、定義，瞭解一定理的逆定理，瞭解一定義或定理的必要條件與充分條件（劉秋木，1996）。

## （五）層次五：嚴密性（rigor）或邏輯法則本質的（the nature of logical laws）層次

此層次的學生可以學習不同的幾何系統，並在不同的系統之間作相互比較，同時能瞭解抽象推理幾何（劉好，1994），能在不同的幾何公理系統中做推理（Van de Walle, 2001/2005）。

上述五個幾何思考層次陳述學童的幾何學習特徵，影響幾何教學，因此數學教育工作者宜加以重視。

## 二、平面幾何知識與其教學重點

在小學階段，學生所學習的平面幾何概念與知識主要包含：平面圖形、平面圖形構成要素、構成要素間的關係等知識。這些知識都在同一平面的條件下討論，且只涉及封閉圖形（封閉圖形的曲線，其起點和終點都在同一點）（普通數學編輯小組，1996）。封閉圖形有內部、外部、周界等知識。本文歸納國小教材的平面圖形，大略可分成三角形、四邊形、圓形等三類。三角形依角的大小可再分銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形，依邊的長短關係可再分正三角形（或叫等邊三角形）、等腰三角形、三邊不等長的三角形，而等腰直角三角形則同時依據角與邊命名。四邊形依邊與角的條件可再分正方形、長方形、平行四邊形、梯形、菱形、等形。圓形則涉及曲線（沒有任何一部份是直的線），與圓形有關者有扇形。陳述二圖形關係者有全等與相似之概念，圖形的放大、縮小、及比例尺知識與相似的概念有關，圖形的對稱知識與全等的概念有關，而對稱又分線對稱與點對稱。平移、旋轉、翻轉、鏡射等與平面圖形的位置變換有關，也一併加以介紹。

平面圖形構成要素及其間關係的幾何概念有：頂點、邊、角、圓心、圓周、半徑、直徑，前三個概念和知識主要與三角形和四邊形有關，後四者主要和圓形有關。與「邊」之位置有關的概念有：腰、對邊、鄰邊。與「角」有關的概念有：銳角、直角、鈍角、平角、周角、旋轉角、頂角、底角、對角、圓心角，旋轉角則涉及旋轉的概念，依旋轉方向可再分順時針與逆時針；頂角、底角、對角與角的位置有關，圓心角則與圓有關。而與邊和長度度量有關的概念有：邊長、周長、圓周長、圓周率等概念。涉及二條邊（直線）之關係的概念有：垂直、平行。與面積度量有關的概念有：正方形、長方形、平行四邊形、三角形、梯形等面積公式。凡與角、長度、面積有關的度量知識，本文將之歸類在「量」的範疇，其知識並未加以陳述。

上述與平面圖形有關的概念或知識的教材安排，由於受學生認知負荷、幾何

思考層次，以及這些知識與概念的難易度、複雜度、抽象程度等的影響，而被適度安排在一至六年級的教學中。本文中所陳述的幾何知識，大部分依據 97 綱要的名詞解釋來定義，而綱要中沒有解釋者，則以其他學者的解釋來定義，但對於不同於課程綱要之解釋者，本文也一同陳述以供參考。下數各年級的平面幾何知識與其教學重點：

### （一）一年級的平面幾何知識與教學重點

國小一年級要學習的平面幾何有：「三角形、正方形、長方形、圓形」等平面圖形、直線與曲線的認識、全等的操作。一年級學童在幾何思維上大都屬於層次一的視覺期，所以教材安排上並不從定義引進教學，而從圖形的整體外觀特徵進行平面圖形的認識。

#### 1. 三角形、正方形、長方形、圓形

所謂的「三角形」其定義是指「由 3 個頂點、3 個邊、3 個角所組成的圖形（如圖 1），其 3 個角的和等於 2 個直角（劉秋木，1996），也就是 3 個內角和是 180 度」，「正方形」是指「4 個角均為直角且 4 邊等長的四邊形（如圖 2）」，「長方形」又稱「矩形」是指「4 個角均為直角的四邊形（如圖 3）」，「圓形」是指「平面上和一固定點等距離的所有點形成的圖形稱為圓形（如圖 4）」（教育部，2008）。

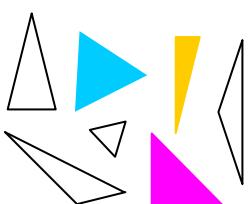


圖 1 三角形

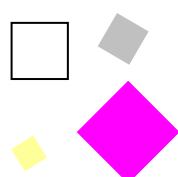


圖 2 正方形

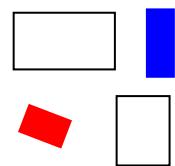


圖 3 長方形

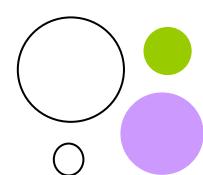


圖 4 圓形

三角形、正方形、長方形、圓形等平面圖形，是學童日常生活中常見的平面圖形，而這些平面圖形往往附著在立體形體上。教師教學時，可利用觀察、描繪、拓印在立體形體上的簡單平面圖形，再透過分類、操作、比較、歸納、推理（國立編譯館，1999a）等活動幫助學生認識與命名這些圖形。也可透過生活中的圖形尋覓、點數，穩固這些圖形的基模。然而進行各類平面圖形的基模建構時，教

材宜依各類平面圖形，分別呈現各種不同大小、顏色、角度擺放的相似圖形（如圖 1、2、3、4），甚至呈現同種類但不相似的圖形（如圖 1、圖 3），供學童判別分類以穩固基模。

就正方形與長方形的定義而言，正方形是長方形的一種，但此包含關係的問題，不適合在一年級出現。

## 2. 直線與曲線

線是指兩點的連接線，此連接線可能是「直線」，也可能是「曲線」，而兩點間的連線以直線最短。有關直線與曲線的區分，歐式幾何認為曲線就是「非直線」，但「非歐式幾何」則認為直線是曲線之一（維基大典，2009；Daintith & Nelson, 1997）。國內幼獅數學大辭典（1983）則將線區分為直線、曲線、折線：直線是任兩點間不改變方向的線（如圖 5），而曲線則是每一點改變方向的線（如圖 6），折線則是由不同方向的有限直線所組成的直線（如圖 7）。國小階段的數學教材大部分只涉及直線，曲線只在一年級時做粗淺的介紹；因此本文只對直線的定義做較詳盡的介紹：直線是幾何學中的原始概念，其沒有端點（溫亦剛，1986），可無限延伸，所以無法測量；但線段則有兩個端點，長度有限，可以測量；至於射線則有一端點，可向另一邊無限延伸，亦無法測量。故，線段與射線都是直線的一種（如圖 5）。

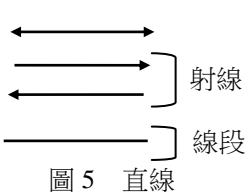


圖 5 直線

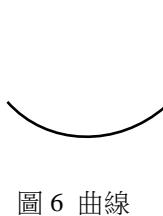


圖 6 曲線

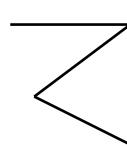


圖 7 折線

一年級雖也引入直線與曲線，但不做嚴謹的定義命名；只透過具體操作活動讓學生認識直線與曲線，做直觀不嚴謹的命名，如：彎彎曲曲的線叫曲線，直直的線叫直線（康軒，2008a；翰林，2006a），但宜引導學童知道二點間的所有連線以直線最短（教育部，2003，2008）。

## 3. 全等

在平面圖形中，如果形狀、大小一樣，可以完全疊合的圖形，稱兩圖形「全

等」(南一, 2000；翰林, 2005a)。在進行二幾何圖形的疊合活動時，往往會將幾何圖形加以變換，也就是將幾何圖形變換成適合於探討的另一個幾何圖形。而基本變換包含平移、旋轉與翻轉，這些變換的知識與概念雖不在教材中加以介紹，但在幾何教學活動中卻常常引導學生操作，尤其進行全等、對稱（對稱的知識請見五年級數學知識）等教學活動時。所謂的「平移」是在平面上進行平行或垂直的移動，使原物件產生移動的現象（如圖 8）；所謂的「旋轉」是在平面上，透過旋轉活動產生位移，而圖形與旋轉後的圖不變（如圖 9）。所謂的「翻轉」是將圖形翻轉 180 度，產生位移，此時圖形未改變，而圖形從原來的正面轉為反面（如圖 10）(國立編譯館, 1999b)。



圖 8 平移

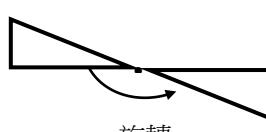


圖 9 旋轉

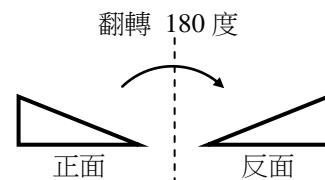


圖 10 翻轉

在一年級只透過拼圖與堆疊活動，進行平移、翻轉、重疊、比對……等操作活動，讓學生經驗空間感與全等的操作，但並未出現這些名詞與定義，「全等」一詞與知識留待四年級才介紹（教育部，2003, 2008）。

教學時，可做三角形、正方形、長方形、圓形等平面圖形的疊合、辨識、仿製、套描、描繪、鋪設（拼排）等表徵活動，以穩固這些平面圖形的知識概念，並讓學生經驗「全等」的意涵，以作為下一階段學習的先備經驗。但進行仿製、套描、描繪活動時，由於學童的肌肉還不能做精細的動作，不宜做精確的要求（教育部，2003, 2008）。

## （二）二年級的平面幾何知識與教學重點

國小二年級要學習的平面幾何有：「頂點、邊、角」等平面圖形構成要素、邊長、正三角形、平面、水平線與鉛垂線。學童在一年級已經歷視覺期，到二年級，其幾何思維可進入層次二的分析期。此時，學生可以透過觀察和實際驗證，分析圖形的構成要素及圖形性質。

## 1. 邊、頂點、角

所謂的「邊」，其定義有二：1. 連接多邊形之頂點的線段；2. 形成一角的兩射線之一 (Daintith & Nelson, 1997)。就第一個定義而言，所謂的多邊形是指由三條以上的直線線段所圍成的封閉平面圖形 (南一，2001；Daintith & Nelson, 1997)，這些線段的成對端點數等於頂點數，且只在頂點相交 (柏羅夫斯基和博溫，1999)。就這個定義來說，「邊」是一線段 (如某三角形的邊)，而此時邊的長度叫「邊長」。就第二個定義而言，「邊」是指射線 (圖 11)。而所謂的「頂點」，其定義是「二條邊相接的地方叫頂點 (圖 12)」。國小課程並不直接陳述邊、頂點的定義，而是在操作、觀察中認識這些名稱。

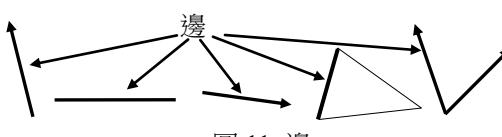


圖 11 邊



圖 12 頂點

所謂的「角」，是指「共同端點的兩射線所成的角」(教育部，2003，2008)。但其在國小教材處理上，涉及學生的認知，因此從生活經驗的應用到數學觀點的建立，其有下列三種不同的定義 (國立編譯館，1999c, 1999d；劉好，1997)：

(1) 圖像角：是一種圖像的表徵，從一方向轉至另一方向 (如圖 13)。此定義是二年級學生剛開始學習角時的啟蒙定義，一般可從多邊形的局部引出角的概念，是一種圖形表徵，也稱圖像角或圖形角 (劉好，1997)，以不大於 180 度為限。

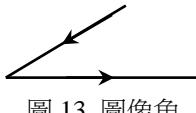


圖 13 圖像角

(2) 張開角：自同一端點射出的兩射線間的差量，也就是兩射線間張開的程度 (圖 14)。此定義用以表示角張開的程度，又稱「張開角」，可以張開至 360 度，但小學教材以不大於 180 度為限，也是三年級「角」概念的主要教學重點。

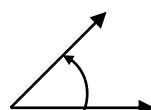


圖 14 張開角

(3)旋轉角：一射線繞其端點旋轉一個程度的量（圖 15）。此定義則涉及角度的旋轉量，有順時針與逆（反）時針方向的差別；且角的大小可以大於 360 度，但小學教材以不大於 360 度為限。旋轉角的教材一般安排於四年級（詳細知識請見四年級平面幾何知識與教學重點）。

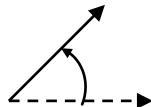


圖 15 旋轉角

有關角的教材安排，二年級從圖像角出發，透過描繪「生活情境的角」、「多邊形的角」等活動，初步認識角是由「共同端點的兩射線」所構成的形狀，而不透過介紹定義來認識角，也不探討角的構成要素。

## 2. 正三角形

二年級的教材安排也可藉由「三條邊等長（圖 16）」的性質限制，進一步定義與介紹「正三角形（或稱等邊三角形）」。

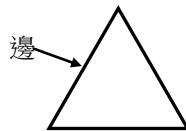


圖 16 正三角形

學生在一年級已透過操作與辨識，在腦子裡建構簡單幾何形狀的基模。到了二年級，學生可先透過觀察及教師的引導建立邊、頂點的知識與概念，再透過邊與頂點建立角的知識與概念，進而透過觀察、測量、點數等活動來分析、探索三角形、正方形、長方形的構成要素——「有幾個頂點？幾條邊？幾個角？」；也可進一步藉由構成要素的條件限制——「三條邊等長」時，稱之為「正三角形」或「等邊三角形」。由於正方形與長方形涉及直角的概念，學生尚未學習，本年級暫不介紹其直角的構成要素；但可透過觀察、點數多邊形之「頂點、邊、角」的個數分別是多少，藉以經驗平面圖形是由「頂點、邊、角」組成，也經驗這些圖形的構成要素與圖形的關係，但不牽涉這些圖形的命名。

在這個年級可要求學生使用「角」、「邊」等名詞與人溝通，並進行邊的實測。在邊的實測教學上，可先透過直尺測量與繪製線段進行直線教學，再引入邊長的

實測。藉由邊長的實測，引導學生察覺正方形四邊相等、正三角形邊長相等（教育部，2003，2008）、長方形兩對邊長相等、等腰三角形兩腰等長等的性質，但教學上並不出現對邊、等腰三角形、腰等專有名詞（教育部，2008）。

### 3. 平面

所謂的「平面」就是平平的面，其有下列性質：如果經過平面內，任意二點作一直線，這直線上的所有點都在這個平面上（幼獅數學大辭典編輯小組，1983；柏羅夫斯基和博溫，1999）。

平面圖形的構成要素都在平面上討論，因此，在二年級也讓學生認識「平面」的概念，然而平面的意義學童不易理解，一般是讓學生以手撫摸「平的桌面」，或拿彩色筆在平面圖形上著色以知覺「平面」。在這個年級也可介紹「面積」的數學知識學習，但只透過面的大小描述、直觀比較、直接比較認識面積（教育部，2003，2008）（相關知識參見面積）。

### 4. 水平線與鉛垂線

水平線與鉛直線是生活用語。所謂的「水平線」是指「將地球表面視為平面，平行於此平面的直線稱之為水平線」，而「垂直於水平線的直線稱之為鉛直線或稱鉛垂線」（康軒，2008b）。由於水平面並不會因容器的擺放是否傾斜而改變其水平的狀態（圖 17），鉛垂線也不會因鉛垂物如何擺放而改變其向地心鉛垂的狀態（圖 18）。所以，教師可引導學生透過操作、觀察、比對，讓學生認識與檢查水平現象與水平線、鉛垂現象與鉛垂線。水平線與鉛垂線可作為平行與垂直概念的先備知識；因此，在二年級可讓學生透過長方形、正方形、直行信紙、窗格、欄杆、梯子等生活常見物品，讓學生認識垂直與平行的現象（教育部，2003，2008）（詳細定義四年級再介紹）。

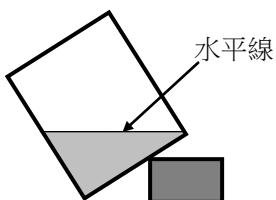


圖 17 水平線

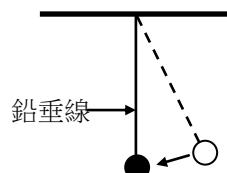


圖 18 鉛垂線

### (三) 三年級的平面幾何知識與教學重點

國小三年級要學習的平面幾何有：「內部、外部、周界、周長」等與封閉圖形有關的概念、「圓心、圓周、半徑、直徑」等圓的構成要素、角與直角、正方形與長方形、面積與角的度量。學童在三年級時，其幾何思維仍以分析期為主，但更深入分析圖形的構成要素與圖形性質。

#### 1. 內部、外部、周界、周長

平面圖形的概念除了「頂點、邊、角」等構成要素，也涉及「內部、外部、周界」等概念。所謂的「周界」是指「在一個由線所圍成的封閉圖形，圍成此圖形輪廓的線就是周界（如圖 19 的黑線）（普通數學編輯小組，1996；柏羅夫斯基和博溫，1999）」，「周界的裡面就是內部（圖 19 灰色部分），周界的外面就是外部（圖 19 灰色部分與黑線以外的部分）」（康軒，2008c）。而周界可以與「量」中的「長度」進行連結，此時「周界的長度就是周長」。

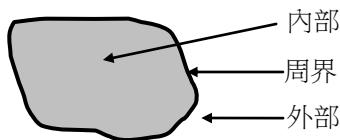


圖 19 封閉圖形的周界、內部、外部

周界、內部、外部的學習可透過描繪、剪裁、丟擲物品等活動建構概念與知識，並透過測量周界的長度建立周長的概念與知識，而不直接透過定義介紹這些概念與知識。而這些知識概念的學習也有助於學生學習「圓」的構成要素——「圓心、圓周、半徑、直徑」的學習，也有助於各平面圖形的周長學習。三年級的周界學習一般只討論常見的平面圖形，而不討論環狀與螺旋形的封閉圖形（教育部，2008）。

#### 2. 圓心、圓周、半徑、直徑

所謂的「圓」是指「平面上和一固定點等距離的所有點形成的圖形稱為圓。」此「固定點」稱為「圓心」，此「距離」稱為「半徑」，此圖形的「周界」稱為「圓周」，而圓周上兩點最長的距離稱為「直徑」（圖 20）（教育部，2003，2008）。

所以，圓的構成要素有：圓心、圓周、半徑、直徑。

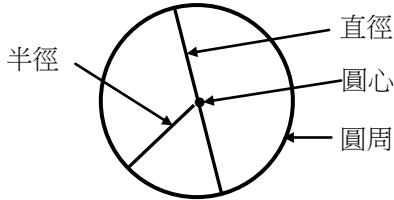


圖 20 圓的圓心、半徑、直徑、圓周

圓形的學習可以透過日常生活中附有圓形圖的物品（如圓柱形體的奶粉罐）觀察、拓印獲得「圓」的概念，再透過折疊圓形板、繪製等操作活動認識圓心、半徑、直徑、圓周等構成要素，最後透過圓規與直尺的使用，繪製圓心、半徑、直徑，以精緻和穩固圓的構成要素之概念。

### 3. 角與直角

學生在二年級透過圖像角初步認識角的概念，到了三年級則可引入張開角的概念：自同一端點射出的兩射線間的差量。**教學時，不直接透過定義進行教學**，而藉由實物圖形的角，引導學生建立角是自一端點向兩個不同方向延伸出兩條射線的結構，讓學生理解角的邊是射線而不是線段，這兩條射線是角張開的限制邊界（劉好，1997）。

為了在圖像角的基礎上連結張開角，教學上可先透過扇子的「開」、「合」現象引入角與角的大小概念；再透過描繪活動引出角的構成要素與名稱：頂點、邊。

角的大小除了可透過直觀或透過疊合進行直接比較大小外，也可透過量角器測量角度進行比較，此部分涉及「量」，相關知識與概念請參見「量與實測」中「角度」的介紹。但在平面幾何中，當角度等於 90 度時，此角稱為直角（教育部，2008）（如圖 21）。此部分的學習可透過三角板的直角描繪與介紹初步認識直角與直角的符號“ $\angle$ ”。

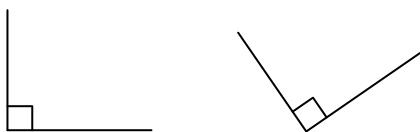


圖 21 直角

有部分學生會質疑「牛角」是不是角？會有這樣的質疑往往是「角」這個名

稱的誤導，也就是學生未清楚瞭解角的兩邊必須是「直」線所致；因此，教學時可呈現波浪線或曲線所構成的圖形（如圖 22），讓學生产生認知衝突，進而澄清角的定義。另外，進行角的大小比較時，一般學生受「邊長」概念的影響，也會產生邊長較長者它的角就比較大的迷思。因此，學習「角」的大小時，也可藉由固定角度而伸縮邊長的活動，讓學生瞭解角的大小與邊長的長短無關。但不管角的大小為何，都可用「 $\angle$ 」之符號表示之。



圖 22 類似但不是角的圖形

#### 4. 正方形、長方形

在一年級的平面幾何知識已介紹過正方形、長方形的意義，在此不再贅述。一年級的教學重點是透過分類進行正方形與長方形的命名；二年級則讓學生察覺正方形與長方形的邊長性質；三年級則進一步透過邊與角的性質分析正方形與長方形的特徵，以穩固正方形、長方形的數學知識。例如：四邊相等、且四角為直角的四邊形為正方形；兩對邊相等、且四角為直角的四邊形為長方形。此外，三年級也介紹正方形與長方形的邊長命名：正方形的四條邊都稱為「邊」；長方形的四條邊有長與寬的不同稱呼，其中一邊稱為「長」，相鄰的另一邊則稱為「寬」，至於哪一邊稱長？哪一邊稱寬？數學上並未明確界定（國立編譯館，2000）。

三年級的平面圖形也與面積的度量——「平方公分」進行連結，讓學生認識長方形、正方形等簡單幾何圖形的面積實測與計算。所以，三年級教材中也安排如下的教學活動：將簡單圖形切割重組成另一已知簡單圖形的操作活動，一方面可作為平面圖形的全等操作以及面積保留概念的練習，二方面可作為未來學習平行四邊形、三角形、梯形等面積計算公式的先備經驗（相關知識請參見面積）。

#### （四）四年級的平面幾何知識與教學重點

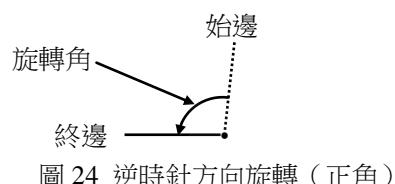
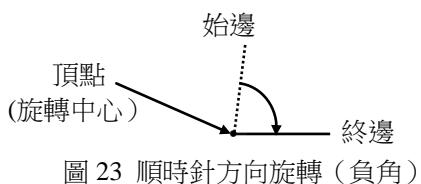
國小四年級要學習的平面幾何有：「旋轉角、銳角、鈍角、平角、周角、頂

角、底角、對角」等與角有關的數學知識、「腰、對邊、鄰邊」等與邊有關的數學知識、垂直與平行、「等腰三角形、直角三角形、銳角三角形、鈍角三角形」等各種三角形知識、「正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形、等形」等各種四邊形知識、全等、長方形和正方形的面積公式與周長公式。學童在四年級時，其幾何思維同樣以分析期為主，可要求學生運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形，並透過操作認識基本三角形與四邊形的簡單性質。

### 1. 旋轉角與各種的角

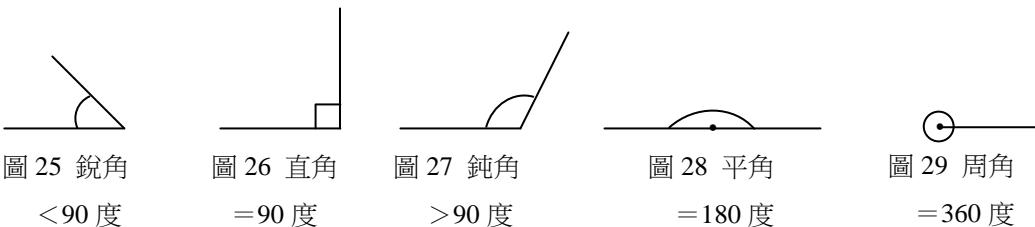
在平面幾何中，「角」的定義有三個（相關知識請見二年級的平面幾何知識），圖形角與張開角已分別於二、三年級引入，四年級則引入旋轉角。旋轉角是因旋轉而產生角，用以代表旋轉程度。旋轉是一種動作，動作停止，其現象就消失，但它有一個起始方向和終止方向，這兩個方向也可用兩條射線來表示（劉好，1997）。旋轉角如時鐘般，固定不動的地方（也就是兩線段或射線的交點）稱之「旋轉中心」或「頂點」（國立編譯館，1999d；康軒，2008d；劉好，1997；翰林，2006b），如時鐘般順著指針方向旋轉者為「順時針」方向旋轉（如圖 23），反之為「逆時針」方向旋轉（如圖 24）。而指針從起點（始邊）旋轉到終點（終邊）所成的角，是為「旋轉角」。順時針旋轉的角稱為負角，逆時針旋轉的角稱為正角（國小階段未引入正角、負角之名詞）。旋轉角可以不只 360 度，但小學教材則限於 360 度以內（國立編譯館，1999c）。

有關旋轉角的教學重點，剛開始可藉由時鐘的指針旋轉引入順時針與逆時針的概念，進而將張開角的概念與旋轉現象加以連結（不宜將旋轉角當做新的專有名詞），也可以與向右轉（順時針轉 90 度）、向左轉（逆時針轉 90 度）、向後轉（轉 180 度）、轉一圈（轉 360 度）等學生經驗連結（教育部，2008）。



角的大小依角度不同，也給予不同的名稱：角度小於 90 度時，此角稱為銳

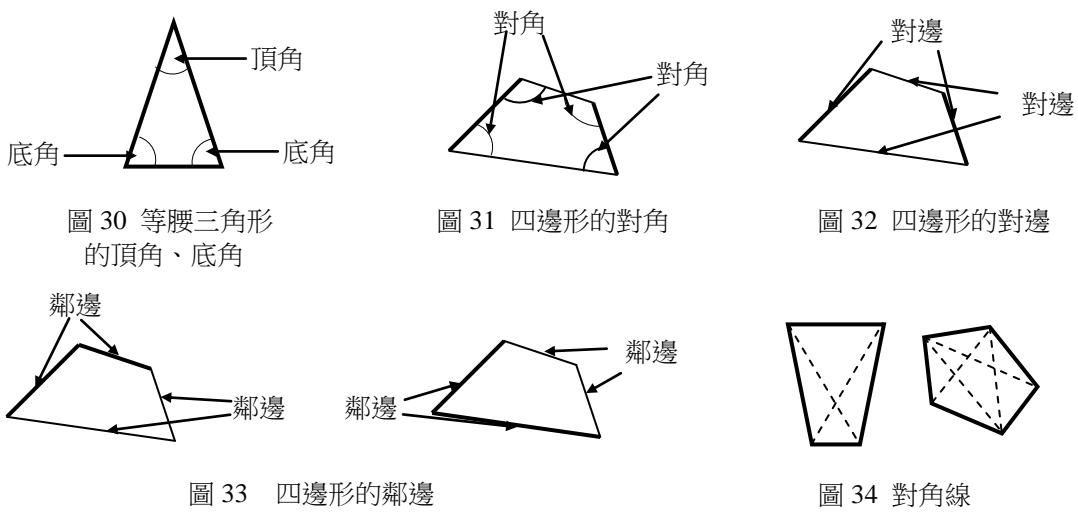
角（如圖 25）；當角度等於 90 度時，此角稱為直角（如圖 26）；當角度大於 90 度時，此角稱為鈍角（如圖 27）；當角度等於 180 度時，此角稱為平角（如圖 28）；當角度大於 180 度時，此角稱為優角（國立編譯館，1999c）（國小不介紹優角）；當角度等於 360 度時，此角稱為周角或全角（教育部，2008）（如圖 29）。



角度的學習可透過量角器的角度測量，以及三角板的直角拼疊。因此，此部分的概念與知識可以搭配「量」的「角度」學習，認識「度」的角度單位，使用量角器實測角度或畫出指定的角（教育部，2008）（相關知識參見角度）。

## 2. 頂角、底角、腰、對邊、鄰邊、對角線

角依角度大小有不同的名稱外，角在三角形中的位置不同也有不同的名稱。例如，等腰三角形兩腰的夾角稱為「頂角」，另外兩角稱為「底角」（教育部，2008）（如圖 30），且二底角一樣大。角在四邊形中的不同位置也有不同的名稱。例如，相對的角稱之「對角」（如圖 31）。在四邊形中，邊的位置不同也有不同的名稱。例如，相對的邊稱之「對邊」（如圖 32），共用一頂點而相鄰的邊稱之「鄰邊」（如圖 33）（康軒，2009）。而「對角線」是指非相鄰頂點之間的連線（如圖 34）（柏羅夫斯基和博溫，1999）（國中才引入）。



這些「角」與「邊」的命名與其在圖形中的位置有關，因此教學時可引導學生思考「角」或「邊」的名稱與其在圖形位置的相關性；所以教學時宜呈現圖形，且圖形要有不同角度的擺放，以協助學生學習這些知識。

### 3. 垂直與平行

在平面幾何中，與角度有關的概念還有垂直與平行。學生在二年級已學過鉛垂線與水平線，可藉此引入垂直的概念：當鉛垂線與水平線相交時，這兩條線就是互相垂直，所成的角稱為直角（南一，2004；翰林，2005b）。四年級已學過直角與直角是 90 度的概念與知識，此時可藉新學的知識引入垂直的概念：當二條直線相交所成的夾角是直角時（成 90 度）（教育部，2008），此時的二條直線互相「垂直（如圖 35）」，亦稱「正交」，其中一直線為另一直線的垂直線或垂線（幼獅數學大辭典編輯小組，1983），二垂直線的交點稱之「垂足」。但是當二條直線在同一平面上永不相交（教育部，2008），也就是二條直線間的距離都相等，或者在同一平面上的二條直線同時垂直另一條直線時，這二條直線就會互相「平行」（康軒，2009；翰林，2005b）（如圖 36），而二平行線間，與二平行線垂直的線段是這二條平行線的距離。

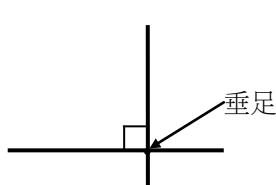


圖 35 互相垂直的二條直線

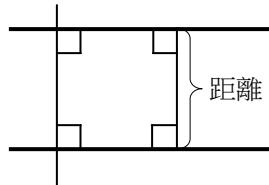
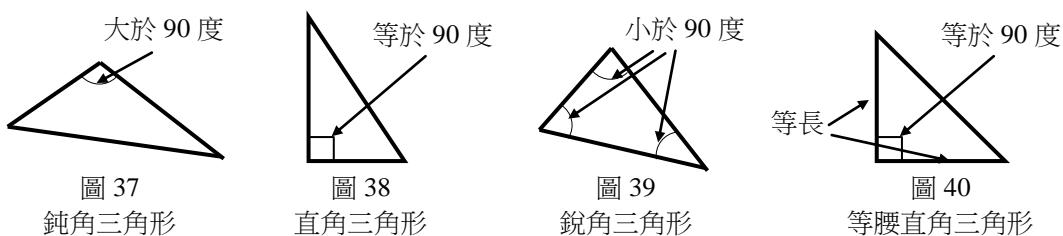


圖 36 互相平行的二條直線

有關平行與垂直現象的認識，最早可安排於二年級，透過周遭生活環境的觀察（如窗格、門）來認識平行與垂直（教育部，2003，2008）。到了四年級，則引入兩線（段）同時垂直於某線（段）時，這兩線（段）就會互相平行；至於垂直則可利用圓形紙板做兩次（摺疊）對半分割（即 4 等分），認識垂直就是 4 等分割後兩直徑所成的夾角，並與分數中的 4 等分連結。四年級也可引入利用三角板繪製直角與平行線，進而用以繪製長方形、正方形等平面圖形（教育部，2003，2008）。

#### 4. 各種三角形

學生在一年級已學過三角形，二年級也對三角形的構成要素進行分析，學生已對三角形有進一步的認識與理解。到了四年級，學生可依三角形的邊或角特性進行分類或命名：依據邊長是否相等的關係來分類者，例如，三角形三條邊等長時，稱之為「正三角形」，此時三內角都是 60 度。當有兩邊相等時，稱之為「等腰三角形」，此三角形相等的兩邊稱為腰，而在此定義下，正三角形也是等腰三角形的一種。依據邊、角的關係來分類者，例如，三角形有一內角是鈍角（大於 90 度）時，稱之為「鈍角三角形」（如圖 37）；有一內角是直角（等於 90 度）時，稱之為「直角三角形」（如圖 38）；三個內角都是銳角（小於 90 度）時，稱之為「銳角三角形」（如圖 39）。同時考量角與邊的條件來分類者，例如，直角三角形的二邊相等時，則稱之為「等腰直角三角形」（教育部，2003，2008）（如圖 40）。



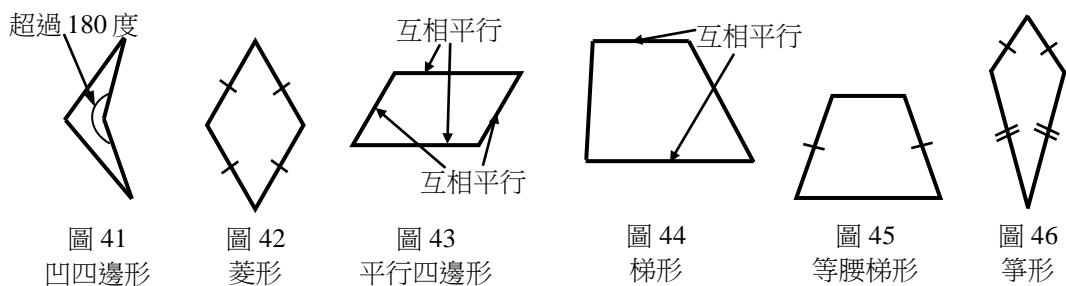
這些三角形的命名與「角」、「邊」有關，教學時可透過角的分類、邊的分類引導學生進行命名。

#### 5. 各種四邊形

所謂的四邊形，是指由 4 條直線線段圍成的平面圖形，每條邊連接二個頂點且不在頂點之間相交（柏羅夫斯基和博溫，1999）。有關四邊形的學習，在國小階段只涉及凸四邊形，而不涉及凹四邊形（如圖 41）。所謂的凸四邊形是指每一內角都小於 180 度的四邊形，而凹四邊形則至少有一內角大於 180 度的四邊形（幼獅數學大辭典編輯小組，1983）。

在一、三年級的平面幾何知識，已陳述學過正方形與長方形等四邊形的定義，在此不贅述，而只陳述其它的四邊形。當四邊形四條邊都等長時，稱之為「菱

形」(如圖 42)；當有二雙對邊互相平行時，稱之「平行四邊形」(如圖 43)；當只有一雙對邊互相平行時稱之「梯形」(如圖 44)(教育部，2008)，但也有學者(Van de Walle, 2001/2005)認為只要合乎「至少有一對平行的對邊」的條件就稱梯形。而在梯形互相平行的二邊，其中一條稱之上底，另一條稱之下底；非上底與下底的兩邊，則稱為梯形的腰；當二腰等長時稱之「等腰梯形」(如圖 45)；當有兩組鄰邊等長的四邊形，形狀有如風箏，稱之「箏形」或「鳶形」(如圖 46)，正方形與菱形所有的鄰邊都等長，所以菱形也是箏形的一種(教育部，2008)。



對於國小學生而言，部分學生已逐漸進入層次三的非形式演繹期，表示其已具備發展對形狀性質關係了解的能力，能建立性質之間的關係及圖形之間的關係，此時可要求學生對圖形做精確簡要的定義與簡單的演繹推理與證明，教師也可透過實測引導學生發現圖形間的相互關係。此時，學生除了可認識各種四邊形的構成要素外，也可討論各四邊形構成要素的性質、彼此間的關係、簡單證明。但部分國小學生難以達到非形式演繹期；因此，64 年版的數學課程，雖然曾安排各種三角形間、各種四邊形間的包含關係探討，但 92 與 97 綱要則將其移到國中才介紹。故，證明與包含關係的探討國小不宜介紹，但對少部分資優且已達非形式演繹期的學生而言，教師可進行個別教導。因此，本文亦陳述正方形、長方形、菱形、平行四邊形、等腰梯形等之性質及其證明，供大家參考。

### (1)正方形的性質

正方形除了四條邊等長、有四個直角外，還有二雙對邊互相平行、二對角線互相垂直且平分的性質。這些性質的證明如下：

①正方形二雙對邊互相平行的證明：

如圖 47，因為正方形的四個角都是直角

所以， $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{BC} \perp \overline{AB}$

因此， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

同理，可推得 $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

故，正方形二雙對邊互相平行

同一平面上的二條直線（如 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ ）同時垂直另一條直線（如： $\overline{AB}$ ），這二條直線互相平行。

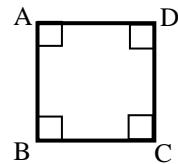


圖 47 正方形兩雙對邊互相平行

②正方形二條對角線互相垂直且平分的證明：

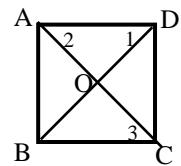


圖 48 正方形二條對角線互相垂直且平分

如圖 48，就 $\triangle DAB$  與 $\triangle CBA$  而言

因為 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，所以 $\angle 2 = \angle 3$ （內錯角相等）

由於， $\overline{DA} = \overline{CB}$ ， $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，

$\angle DAB = 90$  度 =  $\angle CBA$

所以， $\triangle DAB \cong \triangle CBA$  (SAS)，也就是 $\angle 1 = \angle 3$

因為， $\angle 2 = \angle 3 = \angle 1$

所以， $\triangle AOD$  是等腰三角形，也就是 $\overline{OA} = \overline{OD}$

同理，可推得 $\overline{OC} = \overline{OD}$ ，所以 $\overline{OA} = \overline{OC}$

要證明兩對角線互相平分，需證明 $\overline{OA} = \overline{OC}$ 、 $\overline{OD} = \overline{OB}$ 。要證明 $\overline{OA} = \overline{OC}$ ，可先證明 $\triangle AOD$  與 $\triangle COD$  是等腰三角形：透過證明 $\triangle DAB$  與 $\triangle CBA$  全等，進而推得 $\angle 1 = \angle 3$ ，也就是 $\triangle AOD$  是等腰三角形， $\overline{OA} = \overline{OD}$ ；同理可證明 $\triangle COD$  也是等腰三角形， $\overline{OC} = \overline{OD}$ ，又 $\overline{OA} = \overline{OD}$ ；故， $\overline{OA} = \overline{OC}$ 。同理可證明 $\overline{OD} = \overline{OB}$ 。

就 $\triangle AOD$  與 $\triangle COD$  而言

因為， $\overline{OA} = \overline{OC}$ ， $\overline{OD} = \overline{OB}$ ， $\overline{DA} = \overline{DC}$

所以， $\triangle AOD \cong \triangle COD$  (SSS)，也就是 $\angle AOD = \angle COD$

又 $\angle AOD + \angle COD = 180$  度，所以 $\angle AOD = \angle COD = 90$  度

因為， $\overline{OA} = \overline{OC}$ 、 $\angle AOD = \angle COD = 90$  度

要證明兩對角線互相垂直，只要證明 $\angle AOD = \angle COD = 90$  度：先證明 $\triangle AOD$  與 $\triangle COD$  全等，進而推得 $\angle AOD$  和 $\angle COD$  一樣大且和是 180 度，也就是二角都是 90 度。

證明正方形兩對角線互相平分

證明正方形兩對角線互相垂直

所以， $\overline{DB}$  ( $\overline{OD}$ ) 垂直且平分  $\overline{AC}$

同理，可推得  $\overline{AC}$  垂直且平分  $\overline{DB}$

故，正方形二條對角線互相垂直且平分

## (2)長方形的性質

長方形除了有四個直角外，還具有二條對角線等長且互相平分的性質。這些性質的證明如下：

### ①長方形二條對角線等長的證明：

如圖 49，就  $\triangle DAB$  與  $\triangle CBA$  而言

因為  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，所以  $\angle 2 = \angle 4$  (內錯角相等)

由於， $\overline{AD} = \overline{BC}$ ， $\overline{AB} = \overline{BA}$ ， $\angle DAB = 90$  度  $= \angle CBA$

所以， $\triangle DAB \cong \triangle CBA$  (SAS)，也就是  $\overline{DB} = \overline{CA}$

先證明  $\triangle DAB$  和  $\triangle CBA$  全等，就可推得對角線  $\overline{DB}$  和  $\overline{CA}$  等長。

故，長方形二條對角線等長

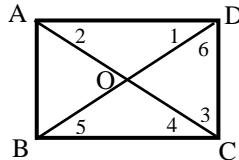


圖 49 長方形的性質

### ②長方形二條對角線互相平分的證明：

接上述(1)的證明，因為  $\triangle DAB \cong \triangle CBA$

所以  $\angle 1 = \angle 4$ ，又已知  $\angle 2 = \angle 4$  (內錯角)

所以， $\angle 1 = \angle 4 = \angle 2$

證明  $\triangle AOD$  與  $\triangle DOC$  是等腰三角形，就可推得  $\overline{CO} = \overline{DO} = \overline{AO}$ ，也就是  $\overline{DB}$  平分  $\overline{CA}$ 。

換言之， $\triangle AOD$  是等腰三角形， $\overline{AO} = \overline{DO}$

同理，可推得  $\triangle DOC$  是等腰三角形，所以  $\overline{CO} = \overline{DO} = \overline{AO}$

因此， $\overline{DB}$  平分  $\overline{CA}$

同理，可推得  $\overline{CA}$  平分  $\overline{DB}$

故，長方形二條對角線互相平分

### (3) 菱形的性質

菱形除了四邊等長外，還具有二對角線互相垂直且平分、二雙對邊等長且互相平行、二雙對角一樣大的性質。這些性質的證明如下：

#### ① 菱形的二對角線互相垂直且平分的證明：

如圖 50，就  $\triangle ABD$  與  $\triangle CBD$  而言

因為  $\overline{AB} = \overline{CB}$ ， $\overline{AD} = \overline{CD}$ ， $\overline{BD} = \overline{BD}$

所以， $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (SSS)，也就是  $\angle 3 = \angle 4$ ， $\angle 8 = \angle 7$

同理可推得  $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ ， $\angle 2 = \angle 1$ ， $\angle 5 = \angle 6$ ；

先證明  $\triangle ABD$  與  $\triangle CBD$  全等， $\triangle ABC$  與  $\triangle ADC$  全等，進而推得  $\angle 3 = \angle 4$ ， $\angle 8 = \angle 7$ ； $\angle 2 = \angle 1$ ， $\angle 5 = \angle 6$ ，以便作為下述證明之用(如  $\triangle ABO$  與  $\triangle ADO$  全等)

就  $\triangle ABO$  與  $\triangle ADO$  而言

因為  $\overline{AB} = \overline{AD}$ 、 $\overline{AO} = \overline{AO}$ 、 $\angle 2 = \angle 1$

所以， $\triangle ABO \cong \triangle ADO$ (SAS)，也就是  $\overline{BO} = \overline{DO}$ ， $\angle AOB = \angle AOD$

又  $\angle AOB + \angle AOD = 180$  度

所以  $\angle AOB = \angle AOD = 90$  度

故  $\overline{AC}$  垂直且平分  $\overline{BD}$

證明  $\triangle ABO$  與  $\triangle ADO$  全等，就可推得  $\overline{BO} = \overline{DO}$ ， $\angle AOB = \angle AOD = 90$  度，也就是  $\overline{AC}$  垂直且平分  $\overline{BD}$

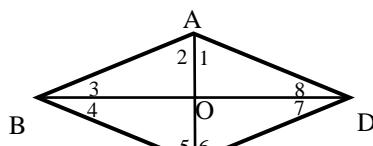


圖 50 菱形的性質

同理可推得  $\overline{AO} = \overline{CO}$ ， $\angle AOD = \angle DOC = 90$  度， $\overline{BD}$  垂直且平分  $\overline{AC}$

故，菱形的二對角線互相垂直且平分

#### ② 菱形的二雙對邊等長且互相平行的證明：

如圖 50，因為  $\triangle ABC \cong \triangle ADC$

所以， $\angle 2 = \angle 1$ ， $\angle 5 = \angle 6$

又  $\overline{AB} = \overline{BC}$ ，所以  $\triangle ABC$  是等腰三角形

先證明  $\triangle ABC$  與  $\triangle ADC$  全等，且  $\triangle ABC$  是等腰三角形，進而推得內錯角  $\angle 1$  與  $\angle 5$  相等

換言之， $\angle 2 = \angle 5$ ，又  $\angle 2 = \angle 1$

所以  $\angle 1 = \angle 5$  (內錯角)，換言之， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

同理可推得  $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

又  $\overline{AD} = \overline{BC}$  、  $\overline{AB} = \overline{DC}$

故菱形的二雙對邊等長且互相平行

### ③菱形的二雙對角一樣大的證明：

接續上述(1)的證明，因為  $\triangle ABC \cong \triangle ADC$  、  $\triangle ABD \cong \triangle CBD$

所以  $\angle ABC = \angle ADC$  、  $\angle BAD = \angle BCD$

故菱形的二雙對角一樣大

### (4)平行四邊形的性質

平行四邊形除了二雙對邊互相平行外，還具有沿對角線分開之兩三角形全等，二雙對角一樣大的性質。這些性質的證明如下：

#### ①平行四邊形沿對角線分開之兩三角形全等的證明：

如圖 51，就  $\triangle DAB$  與  $\triangle BCD$  而言

因為  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\angle ADB = \angle CBD$  (內錯角相等)

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ 、 $\angle ABD = \angle CDB$  (內錯角相等)

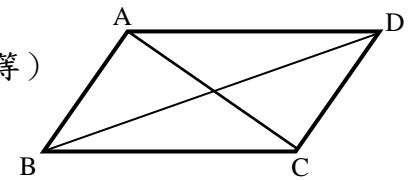


圖 51 平行四邊形的性質

又  $\overline{BD} = \overline{BD}$ ，所以  $\triangle DAB \cong \triangle BCD$  (ASA)

同理可證明  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

故，平行四邊形沿對角線分開之兩三角形全等

#### ②平行四邊形二雙對角一樣大的證明：

接續上述(1)的證明，因為  $\triangle DAB \cong \triangle BCD$ ，所以， $\angle BAD = \angle DCB$

同理可證明  $\angle ABC = \angle CDA$

故，平行四邊形二雙對角一樣大

### (5)等腰梯形的性質

等腰梯形除了二腰等長外，還具有二雙底角一樣大的性質，性質證明如下：

等腰梯形二雙底角一樣大的證明：

如圖 52，作一條平行於  $\overline{DC}$  的線段  $\overline{AE}$

因為  $\overline{DC} \parallel \overline{AE}$ 、 $\overline{AD} \parallel \overline{EC}$ ，所以四邊形 AECD 是平行四邊形

由於  $\angle 1 = \angle 2$ ， $\overline{DC} = \overline{AE}$ ，又  $\overline{DC} = \overline{AB}$

所以， $\overline{AB} = \overline{AE}$ ， $\angle 2 = \angle 3$

又  $\angle 1 = \angle 2$ ，所以  $\angle 1 = \angle 3$

由於  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\angle 1 + \angle CDA = 180$  度（同側內角之和為 180 度）

同理  $\angle 3 + \angle BAD = 180$  度

又  $\angle 1 = \angle 3$ ，所以  $\angle CDA = \angle BAD$

由於  $\angle 1 = \angle 3$ 、 $\angle CDA = \angle BAD$

故，等腰梯形的二雙底角一樣大

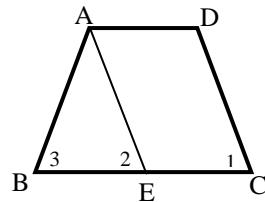


圖 52 等腰梯形的性質

上述四邊形的性質的演繹證明大都國中才學習，對國小學生而言，較難理解，所以國小教材大都透過操作直尺、三角板、量角器、圓規、模型等工具，或使用摺紙、剪裁、測量等方法，讓學生發現這些性質。所以，四年級只適合進行基本三角形與四邊形的簡單性質（如：正三角形三角相等、等腰三角形兩底角相等、平行四邊形沿對角線分開之兩三角形全等）的認識。

本文亦把上述的四邊形的性質（採用 97 約要的定義）整理於表一：

表一 各四邊形的性質一欄表

| 形狀    | 四邊等長 | 二雙對邊等長 | 恰有一雙對邊等長 | 二雙對邊互相平行 | 只有一雙對邊互相平行 | 有四個直角 | 二雙對角一樣大 | 二組鄰邊等長 |
|-------|------|--------|----------|----------|------------|-------|---------|--------|
| 正方形   | V    | V      |          | V        |            | V     | V       | V      |
| 長方形   |      | V      |          | V        |            | V     | V       |        |
| 菱形    | V    | V      |          | V        |            |       | V       | V      |
| 平行四邊形 |      | V      |          | V        |            |       | V       |        |
| 梯形    |      |        |          |          | V          |       |         |        |
| 等腰梯形  |      |        | V        |          | V          |       |         |        |
| 等形    |      |        |          |          |            |       |         | V      |

從表一來看，這些四邊形依其各自的性質有如下的關係：正方形有四個直角，所以是長方形的一種；正方形也有4條等長的邊，所以也是菱形的一種。但長方形與菱形沒有歸屬關係。正方形、長方形、菱形都具有二雙對邊互相平行的性質，所以都是平行四邊形的一種。上述四邊形的分類（如圖 53）與包含關係可參見下圖（如圖 54）：

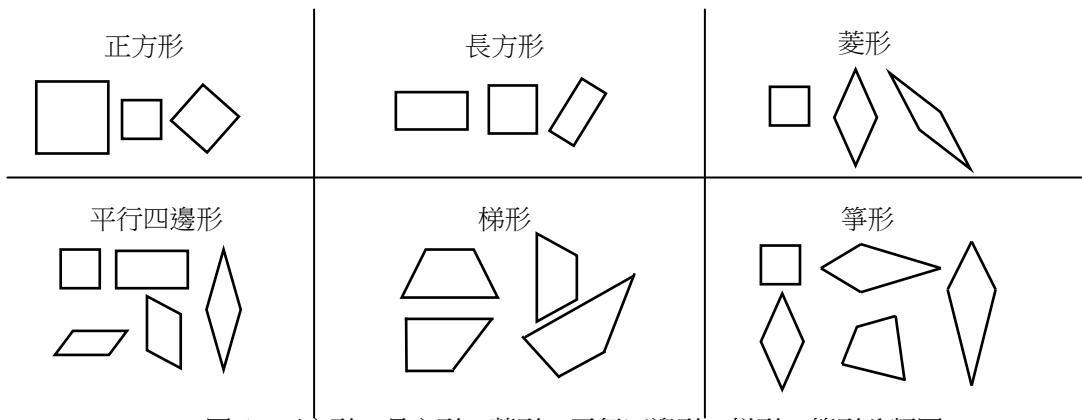


圖 53 正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形、等形分類圖

(修改自 Van de Walle,2001/2005)

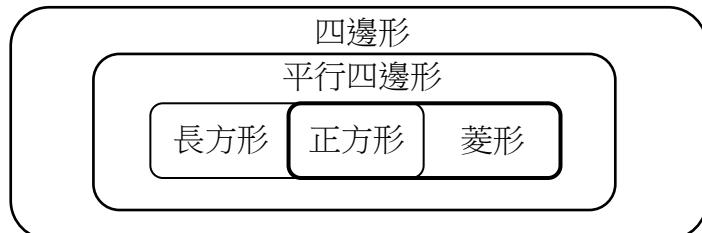


圖 54 正方形、長方形、菱形、平行四邊形的包含關係圖

(引自 Van de Walle,2001/2005)

## 6. 全等

學生在一年級時已透過平移、旋轉、翻轉等重疊操作經驗「全等」（該定義已於一年級的平面幾何知識已陳述，在此不再贅述），但「全等」一詞與相關概念直到四年級才加以介紹：兩全等圖形，相對應的點稱之「對應點」，對應的邊稱之「對應邊」，對應的角稱之「對應角」（教育部，2008）（如圖 55）。

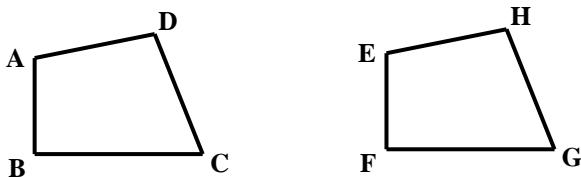


圖 55 全等圖形

圖 55 的四邊形 ABCD 和四邊形 EFGH 是二個全等的四邊形，也就是兩四邊形能完全疊合在一起，點 A 與點 E 重疊，點 B 與點 F 重疊，點 C 與點 G 重疊，點 D 與點 H 重疊；邊 AB 與邊 EF 重疊，邊 BC 與邊 FG 重疊，邊 CD 與邊 GH 重疊，邊 DA 與邊 HE 重疊； $\angle DAB$  與  $\angle HEF$  重疊， $\angle ABC$  與  $\angle EFG$  重疊， $\angle BCD$  與  $\angle FGH$  重疊， $\angle CDA$  與  $\angle GHE$  重疊。這些重疊的點叫對應點，重疊的邊叫對應邊，重疊的角叫對應角。

在教學上，同樣引導學生使用平移、旋轉、翻轉、重疊的操作活動，讓學生理解「全等」一詞的意義與相關知識。

三年級時已引入面積的「平方公分」單位，並讓學生認識長方形、正方形等簡單幾何圖形的面積實測與計算，以及周長的實測；到了四年級則藉三年級的學習基礎，進一步發展與理解面積公式與周長公式（相關知識請參見面積與長度）。

## （五）五年級的平面幾何知識與教學重點

國小五年級要學習的平面幾何有：三角形之角和邊的性質、圓心角與扇形、對稱、「三角形、平行四邊形與梯形」的面積公式。另外，64 年版與 82 年版的國小數學課程中，甚至九年一貫課程暫行綱要也都曾在國小高年級引進多邊形與正多邊形（等邊又等角的多邊形（Daintith & Nelson, 1997））的介紹，但九年

一貫課程正式綱要則移到國中才介紹。

學童在五年級時，其幾何思維也是以分析期為主。

### 1. 三角形的角與邊之性質

任一三角形也具有「三內角和是 180 度」、「任二邊之和大於第三邊，任二邊之差小於第三邊」、「大角對大邊，小角對小邊」的性質。至於如何理解這些性質呢？就「三角形的三內角和是 180 度」而言，在國小階段，只要將三內角「裁剪」下來加以拼排，或將三內角加以「摺疊」，就可發現其可拼排或摺疊成一個平角，而平角就是 180 度（如圖 56 之(1)、(2)）。除了這些方法外，也可以透過畫平行線再進行推論證明的方法來理解；但此方法適合層次三之非形式演繹期以上的國中學生（如圖 56 之(3)），並不適合國小五年級學童學習。因此這方面的教學都移到國中才引入，但對少部分資優且已達非形式演繹期的學生而言，教師可進行個別教導。因此，本文亦一併介紹：

通過  $\angle 2$  之頂點 A，畫一條直線 L

使  $L \parallel BC$

因為  $L \parallel BC$ ，所以  $\angle 1 = \angle 4$ ， $\angle 3 = \angle 5$ （內錯角相等）

$\angle 4$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 5$  合成一個平角

也就是  $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180$  度

故  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180$  度

一直線通過兩平行線時，它們的內錯角相等。

利用平角是 180 度證明三內角和是 180 度。

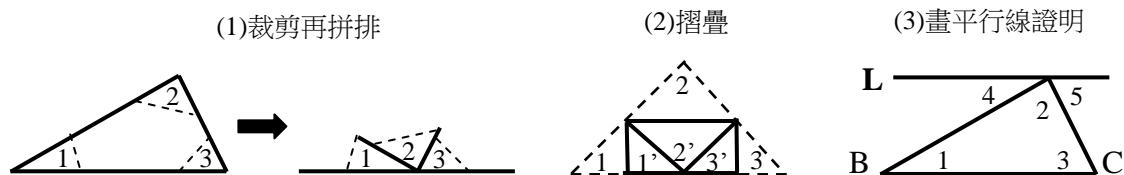


圖 56 三角形三內角和是 180 度

五年級也可以透過指導學生操作、測量並加以計算的方法理解「任二邊之和大於第三邊，任二邊之差小於第三邊」的性質。至於「大角對大邊，小角對小邊」

的性質探討則移至國中才引入（教育部，2003，2008）。

## 2. 圓心角與扇形

學生在三年級已學過圓，也對「圓」的構成要素進行分析與命名；四年級時也學過「角」，也對角的構成要素進行分析與命名。到了五年級，教材的安排進一步把圓與角進行連結，介紹與二者有關的圓心角、扇形等平面幾何知識之學習。所謂的「圓心角」是指「以圓心為頂點兩半徑為邊所組成的角」（如圖 57 的粗線）。

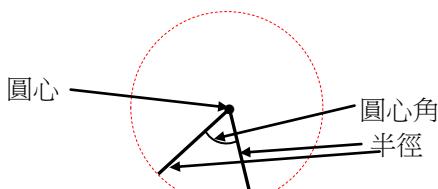


圖 57 圓心角

而扇形與圓心角的學習有密切的關係。所謂的「扇形」就是「圓的兩半徑和一弧所圍成的圖形」（教育部，2003，2008）（如圖 58 的粗線）。

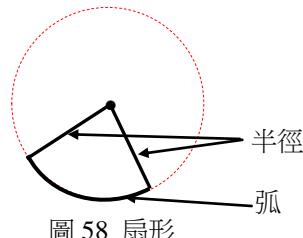


圖 58 扇形

在教材安排上，通常會把扇形與圓心角放在同一單元，尤其進行扇形面積求解時，涉及圓心角。在扇形的教材安排，一般會利用扇子先複習角的概念，進而引入扇形的認識與命名，接著分析扇形的構成要素與命名。圓心角概念的引入，有益於扇形面積的求解，而扇形面積的求解有益於複合圖形面積的求解。

## 3. 對稱

在平面幾何中，「對稱」也是重要的概念，而對稱圖形的概念分「線對稱」與「點對稱」（也稱「心對稱」）。所謂「線對稱圖形」是指「在一平面上，能在這一平面上找到一條直線，沿此直線對摺（涉及翻轉的概念）或鏡射，直線另一邊的圖形的所有線條與原圖形重合時，我們稱此圖形為「線對稱的圖形」。」「鏡射」是物件對鏡子的投射活動，鏡子的另一邊呈現出與原圖形左右相反但全等的圖

形；也就是透過鏡子，將一平面圖形轉換到另一平面（劉秋木，1996），兩面的圖形可完全疊合，此疊合猶如將平面圖形翻轉 180 度後，圖像從原來的正面轉為反面後，與原圖全等（國立編譯館，1999b）。

當圖形對一直線對稱時，此直線稱為「對稱軸」，相對應之點、邊、角，則分別稱為「對稱點」、「對稱邊」、「對稱角」（如圖 59）。圖 59（2）的虛線是對稱軸，點 A 和點 D 重疊，點 B 和點 C 重疊，這些重疊的點叫對稱點；邊 EA 和邊 ED 重疊，邊 AB 和邊 DC 重疊，這些重疊的邊叫對稱邊； $\angle EAB$  和  $\angle EDC$  重疊， $\angle ABC$  和  $\angle DCB$  重疊，這些重疊的角叫對稱角。

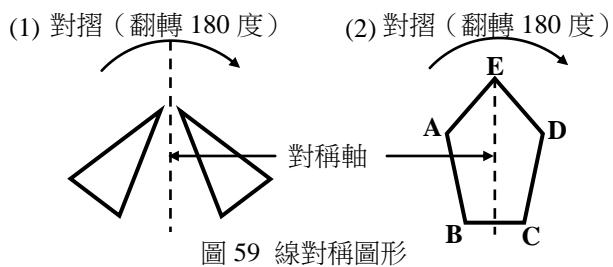


圖 59 線對稱圖形

進行線對稱的教材安排時，除了透過日常生活圖形的翻轉與鏡射（將鏡子放在對稱軸上，觀察對稱軸兩邊的圖形）活動讓學生觀察外，也會讓學生透過對摺、剪紙等活動，認識線對稱並進行命名。進而透過垂直線、測量等活動引入線對稱圖形的性質討論。例如，線對稱圖形中，對稱點的連線會和對稱軸垂直，而且對稱點到對稱軸的距離等長，換言之，對稱軸垂直且平分二對稱點的連線（如圖 60）。

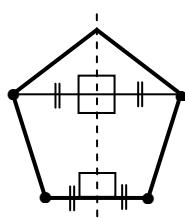


圖 60 對稱軸垂直且平分二對稱點的連線

另外，透過實做，讓學生發現線對稱圖形的對稱軸可能不只一條（如圖 61）（點對稱圖形的對稱中心只有一個）；也透過繪製線對稱圖形的活動穩固對稱的概念。

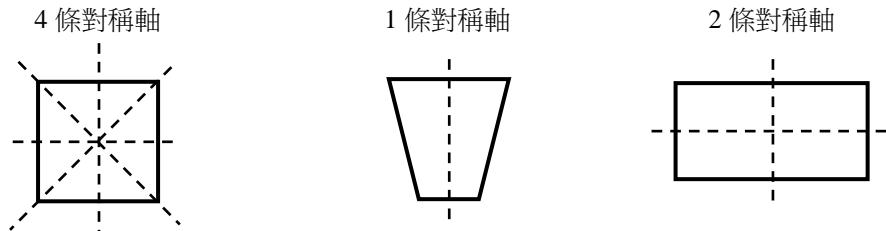


圖 61 線對稱圖形的對稱軸可能不只 1 條

所謂「點對稱圖形」是指「圖形對其所在平面上的一定點，做 180 度的旋轉後，圖形上的任一點仍然在圖形上，也就是旋轉後的圖形與原圖形重合，稱此圖形為點對稱圖形」，此定點稱為「對稱中心」（如圖 62）。

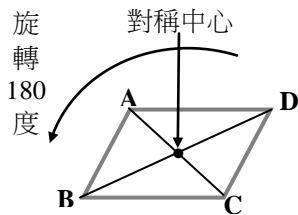


圖 62 點對稱圖形

從線對稱圖形的定義與點對稱圖形的定義來看，二者都有「與原圖形（本身）重合」的陳述，但二者的概念有些不同，線對稱圖形是「翻轉」後的重合，而點對稱圖形是「旋轉」後的重合。可是，在平面圖形中，有些圖形（如長方形、菱形、正方形）翻轉 180 度後會與原圖形重合，旋轉 180 度後也與原圖形重合（如圖 63），也就是其不但是線對稱圖形也是點對稱圖形。

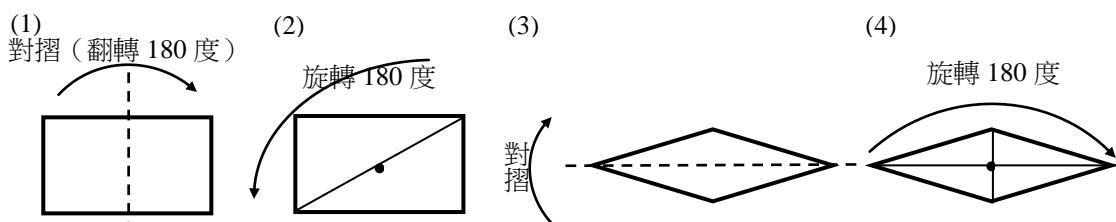


圖 63 是線對稱圖形，也是點對稱圖形

有些圖形（如正五邊形）翻轉 180 度後能與原圖形重合（如圖 64(1)），但旋轉 180 度後無法與原圖形重合（如圖 64(2)，虛線圖形是旋轉 180 度後的圖形），也就是其只是線對稱圖形，但不是點對稱圖形。

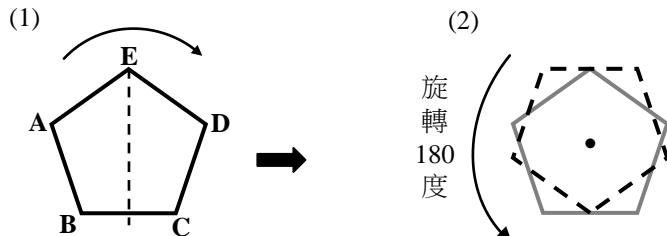


圖 64 是線對稱但不是點對稱圖形

有些圖形（如平行四邊形）只有旋轉 180 度後與原圖形重合（如圖 65(1)），但翻轉 180 度後則無法與原圖形重合（如圖 65(2)(3)(4)，虛線圖形是翻轉 180 度後的圖形），也就是其只是點對稱圖形，但不是線稱圖形。

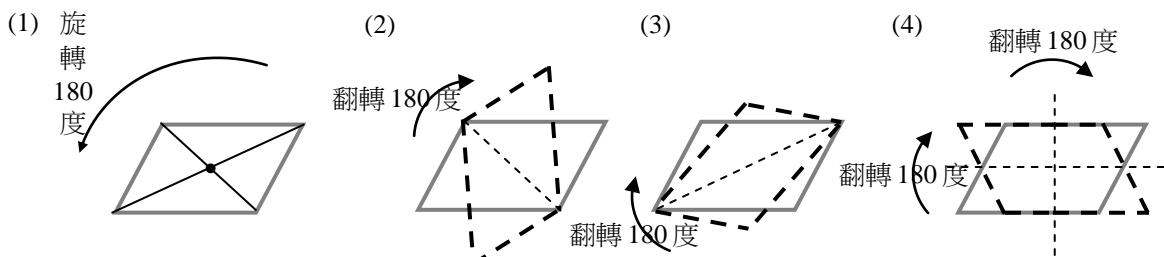


圖 65 是點對稱但不是線對稱圖形

當然有些圖形（如不等邊的三角形）不管是翻轉或旋轉都無法與原圖形重合（如圖 66）。

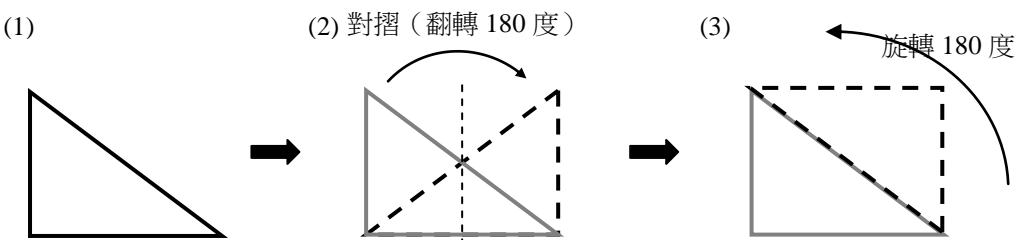


圖 66 既不是線對稱也不是點對稱圖形

所以，將線對稱圖形作 180 度的旋轉後，其圖形不一定如點對稱圖形的定義「旋轉後的圖形與原圖形重合」（如圖 64）；同樣，將點對稱圖形摺疊（翻轉 180 度），也不一定會產生「圖形的所有線條與本身重合」的情形（如圖 65），所以二者不一定有包含關係。由於點對稱圖形較難，而五年級又是首次接觸對稱的概念，所以國小階段不出現點對稱的教學。

「全等」與「對稱」在定義上非常相近，容易混淆，本文亦加以區分：「全等」是指兩圖形能透過平移、旋轉、翻轉的活動，而能達到重疊（重合）者，這兩個圖形就是「全等圖形」。「對稱」又分線對稱與點對稱。線對稱是指某一圖形經翻轉（折疊）後，對稱軸兩邊的圖能重合者，這個圖是線對稱圖形；點對稱圖形則指某一圖形，繞著對稱點旋轉 180 度後，旋轉前與旋轉後的圖形完全一樣（重合），這個圖形就是點對稱圖形。前述的「重疊」、「重合」就是「全等」的概念。所以，線對稱與點對稱都以「全等」為先備知識。在生活中常有由多個封閉圖形所組成的組合圖形（如圖 67）；因此，全等圖形則涉及二個封閉圖形或二個組合圖形間的關係；但線對稱圖形與點對稱圖形則就封閉圖形或組合圖形自身而言。

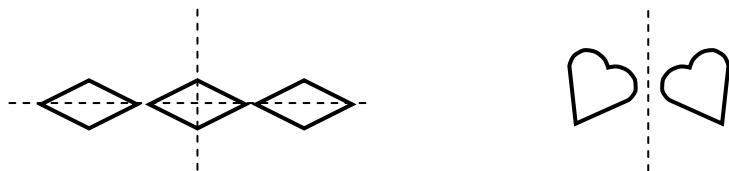


圖 67 線對稱的組合圖形

因為四年級已引入長方形與正方形面積公式，所以到了五年級時，可在此基礎下，利用切割重組的方法，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式（教育部，2003, 2008）（相關知識請參見面積），因此五年級也介紹三角形的底與高。所謂的高是指：從三角形的任一個頂點向它的對邊作垂線（康軒，2009），頂點到垂足間的線段叫做這邊（此邊稱之為底）上的「高」。垂足可能在邊上，也可能在邊的延長線上（如圖 68）。由於，每一頂點都有一條對邊（底），每一個頂點到對邊（底）都只有一條高；所以，三角形有三個頂點，三條頂點的對邊（底），也就有三條高。

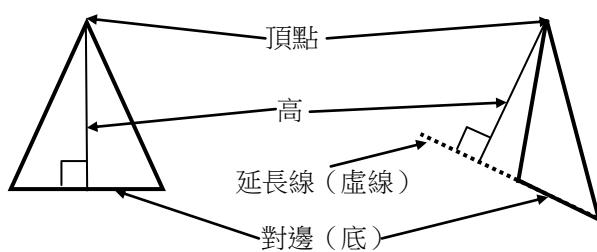


圖 68 三角形的高

## (六) 六年級的平面幾何知識與教學重點

國小六年級要學習的平面幾何有：三角形與四邊形之內角和性質、圓周率、放大與縮小、比例尺、圓面積與圓周長的公式、扇形面積。

### 1. 三角形與四邊形的內角和性質

四邊形（凸）也有四內角和是 360 度的性質，會有此性質的主要原因是任何一個四邊形，只要把對角的頂點以直線連接（**不可有相交的情形**），都可畫成二個三角形，一個三角形 180 度（如圖 69），二個就是 360 度（如圖 70）。在教學上，可採用剪裁拼貼的方法，讓學生理解三內角和都等於 180 度，但不出現「內角」一詞。



圖 69 三角形的三內角和是 180 度

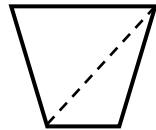


圖 70 四邊形的四個內角和是 360 度

### 2. 圓周率

圓的幾何概念與面積概念的內部連結，主要是涉及圓面積的求解，而圓面積的求解與圓周率有關（圓面積的求法參見面積）。所謂的「圓周率」是指「圓周長與直徑之比值稱為圓周率，常用的近似值為 3.14」，希臘人以「 $\pi$ 」表示。有關圓周率的研究，中國早在東漢就有圓周率「3」的相關記載，南北朝祖沖之算出圓周率是「3.1415926」（國立編譯館，1998）。而圓周率的教學，一般是透過圓周長與直徑的實測，再進行圓周長與直徑的比值求解，讓學生察覺二者的數量關係，進而對此數量關係的比值進行命名。

### 3. 放大與縮小

在平面幾何中，也有放大與縮小的概念，此概念是一種「相似圖形」的概念。所謂的「相似」是指「一圖形經縮放後與另一圖形全等，則稱此兩圖形相似。」（如圖 71）（教育部，2003，2008）。

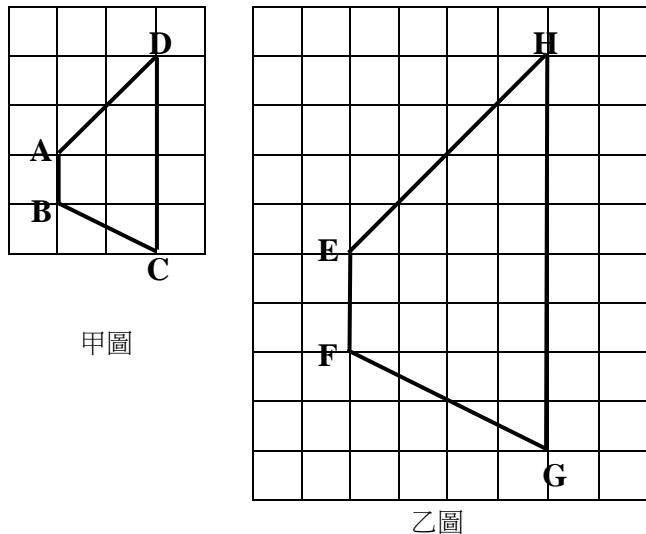


圖 71 相似圖

乙圖的長、寬都是甲圖的 2 倍，我們稱乙圖是甲圖的 2 倍「放大圖」；相反的，甲圖的長、寬都是乙圖的  $1/2$ ，甲圖是乙圖的  $1/2$ 「縮圖」。而放大與縮小的概念是透過觀察、討論中來建立和命名。當學生建立相似圖的概念後，可進一步進行二相似圖形的性質之分析探討。圖 71 中的二圖是相似圖，甲圖的點 A、點 B、點 C、點 D，分別是乙圖的點 E、點 F、點 G、點 H 之對應點；甲圖的邊 AB、邊 BC、邊 CD、邊 DA，分別是乙圖的邊 EF、邊 FG、邊 GH、邊 HE 之對應邊；甲圖的  $\angle DAB$ 、 $\angle ABC$ 、 $\angle BCD$ 、 $\angle CDA$ ，分別是乙圖的  $\angle HEF$ 、 $\angle EFG$ 、 $\angle FGH$ 、 $\angle GHE$  之對應角。從分析探討中，可發現二相似圖的對應角一樣大，各對應邊則有相同的比例關係。而二相似圖的面積關係，透過繪製與計算活動，可察覺圖的邊長放大為原來的  $n$  倍時，面積則放大為原來的  $n^2$  倍，相反的，圖的邊長縮小為原來的  $1/n$  倍時，面積則縮小為原來的  $1/n^2$  倍（如圖 72）。

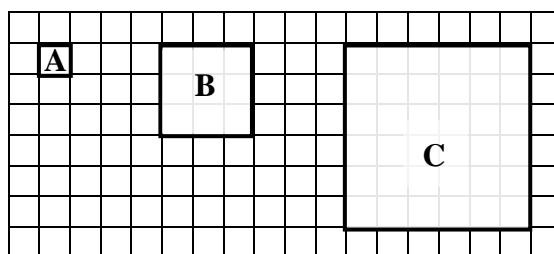


圖 72 放大、縮小圖的邊長與面積之關係圖

圖 72 的 A、B、C 三個正方形，他們的邊長分別是 1、3、6，面積分別是  $1 \times 1$ 、 $3 \times 3$ 、 $6 \times 6$ ，也就是 B、C 二正方形的邊長分別是 A 正方形的 3 倍與 6 倍，但 B、C 二正方形的面積分別是 A 正方形的  $3 \times 3$  倍與  $6 \times 6$  倍。反之，A、B 二正方形的邊長分別是 C 正方形的  $1/6$  與  $1/2$ ，而 A、B 二正方形的面積則分別是 C 正方形的  $1/36$  與  $1/4$ 。

#### 4. 比例尺

比例尺是縮圖或放大圖的應用，用以表示縮圖（或放大圖）的長度與原圖長度的比或比值（康軒，2008e）。而這種比或比值在地圖上，常以圖示的方式表示（如圖 73）。

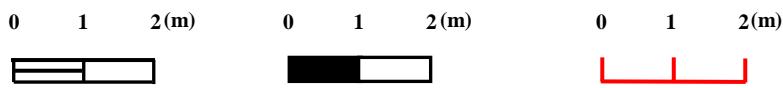


圖 73 比例尺

圖 73 中的比例尺，縮圖上的 1 公分線段圖表示的是實際長度的 1 公尺。而我們可從比例尺中去估計或計算實際圖的尺寸大小。例如，地圖上 6 公分的圍牆，其實際的長度是  $6 \text{ 公分} \times 100 = 600 \text{ 公分} = 6 \text{ 公尺}$ 。也可利用縮圖（或放大圖）的長度與原圖長度的比來求解。 $1 \text{ 公分} : 1 \text{ 公尺} = 1 \text{ 公分} : 100 \text{ 公分} = 6 \text{ 公分} : ( )$ ， $( ) = 600 \text{ 公分} = 6 \text{ 公尺}$ 。

由於比例尺的教學是以比與比值、放大與縮小為先備知識；所以大部分的教材都安排在這些教材後面，甚至安排在同一單元。

在六年級也可引入圓面積與圓周長的公式、扇形面積、複合圖形面積的教學（教育部，2003，2008），這方面的相關知識請參見面積與長度。

總之，平面幾何圖形、構成要素、性質、關係的學習，受 van Hiele 的五個幾何思考層次的影響，因此教材的安排，教師的教學受這些思考層次的影響。例如，同樣是正方形的數學知識教學，一年級只透過拓印、分類等活動進行正方形

的命名；二年級則透過點、邊、角分析正方形的構成要素，並透過測量察覺正方形的四條邊等長；三年級則在直角教學後，進行正方形更精確的定義；四年級以後才深入探討其性質及與其它圖形的關係。這些不同的教材安排與教學都是顧及學童的幾何發展層次。故，教師從事教學設計或教學時，宜考慮學生是在哪一年級，已達到的幾何層次，再給予適度的教材安排與教學。

從 82 年版的數學課程(教育部, 1993)到九年一貫課程綱要(教育部, 2003, 2008)的教材安排來看，它們雖然都有少許的不同，但在教材安排上還是大同小異，大部分是：一年級是透過具體操作察覺與認識平面幾何圖形；二、三年級則透過認識與分析三角形、四邊形、圓形等幾何圖形的構成要素；三、四年級則逐步就這些構成要素探討三角形、四邊形的性質，並認識相關的知識；五、六年級則介紹圓形、對稱、相似、比例尺等的幾何知識。此外，二、三年級分別與長度、角度的度量學習連結，四年級以後逐步與面積公式等度量學習連結。對各年級的學生而言，教材的安排雖相同，但學生的思考層次和認知不一定相同，所以教師教學時，除了考慮大部分學生該學的教材外，也要考慮個別學生的認知、學習狀況，給予適度的教學引導，提供適度的鷹架。

本文首先介紹 van Hiele 的五個幾何思考層次，再陳述一到六年級的幾何知識與其教學重點，以供教育工作者參考，也希望對有意進行數學專業知能成長者有所幫助。

## 參考文獻

- 幼獅數學大辭典編輯小組 (1983)。幼獅數學大辭典。台北：幼獅文化。
- 吳德邦 (2000)。台灣中部地區國小學童范析理幾何思考層次之研究——筆試部分。載於國立台北師範學院 (編)，八十八學年度師範學院教育學術論文發表會(頁 35-66)。台北：國立台北師範學院。
- 柏羅夫斯基和博溫 (1999)。數學辭典 (貓頭鷹編譯小組譯)。台北：貓頭鷹出版社。
- 南一 (2000)。國民小學數學教學指引第 3 冊 (新版)。台南：南一。
- 南一 (2001)。國民小學數學教學指引第 9 冊 (新版)。台南：南一。
- 南一 (2004)。國民小學數學第 6 冊。台南：南一。
- 康軒 (2008a)。國小數學 1 上 (第三版)。台北：康軒。
- 康軒 (2008b)。國小數學 2 上 (第三版)。台北：康軒。
- 康軒 (2008c)。國小數學 3 上 (第二版)。台北：康軒。
- 康軒 (2008d)。國小數學 4 上。台北：康軒。
- 康軒 (2008e)。國小數學 6 上 (第三版)。台北：康軒。
- 康軒 (2009)。國小數學 5 下。台北：康軒。
- 教育部 (1993)。國民小學課程標準。台北：台捷。
- 教育部 (2003)。國民中小學九年一貫課程綱要。台北：教育部。
- 教育部 (2008)。97 年國民中小學課程綱要。2009 年 3 月 28 日取自教育部國教司網站：[http://www.edu.tw/files/site\\_content/B0055/970911](http://www.edu.tw/files/site_content/B0055/970911) 數學課程綱要修訂(單冊)\_1.doc
- 國立編譯館 (1998)。國民小學數學教學指引第十冊 (五下) (改編本三版)。台北：國立編譯館。
- 國立編譯館 (1999a)。國民小學數學教學指引第 1 冊。台北：國立編譯館。
- 國立編譯館 (1999b)。國民小學數學教學指引第 3 冊。台北：國立編譯館。
- 國立編譯館 (1999c)。國民小學數學教學指引第 6 冊。台北：國立編譯館。

- 國立編譯館 (1999d)。國民小學數學教學指引第 7 冊。台北：國立編譯館。
- 國立編譯館 (2000)。國民小學數學教學指引第 8 冊。台北：國立編譯館。
- 普通數學編輯小組 (1996)。普通數學 (合訂本)。台北：許氏美術印刷。
- 溫亦剛 (1986)。九鼎實用數學辭典。台北：九鼎出版社。
- 趙文敏 (1992)。幾何學概論。台北：九章。
- 維基大典 (2009)。2009 年 7 月 3 日取自：<http://zh-classical.wikipedia.org/wiki/%E7%9B%B4%E7%B7%9A>
- 劉好 (1994)。國民小學數學科新課程中幾何教材的設計。載於台灣省國民學校教師研習會 (編) 國民小學數學科新課程概說 (低年級) (頁 98-108)。台北：台灣省國民學校教師研習會。
- 劉好 (1997)。角的課程設計。載於台灣省國民學校教師研習會 (編) 國民小學數學科新課程概說 (中年級) (頁 202-214)。台北：台灣省國民學校教師研習會。
- 劉秋木 (1996)。國小數學科教學研究。台北：五南。
- 翰林 (2005a)。國民小學數學教學指引 4 上 (修訂三版)。台南：翰林。
- 翰林 (2005b)。國民小學數學教學指引 5 上 (修訂二版)。台南：翰林。
- 翰林 (2006a)。國民小學數學教學指引 1 上 (修訂一版)。台南：翰林。
- 翰林 (2006b)。國民小學數學教學指引 4 下 (修訂三版)。台南：翰林。
- Daintith, J. & Nelson, R. D. (1997)。牛頓數學辭典 (余文卿和謝暉光譯)。台北：牛頓出版社。
- Van de Walle, J. A. (2005)。中小學數學科教材教法 (四版) (張英傑、周菊美譯)。台北：五南。(原發行於 2001)