你所不知道的規律

摘要

藉由因數與倍數的數學單元告訴學生，凡 2、3、5、11 的倍數都有一些簡便的方法可尋找數字的規律性。學生們也想找出其他數的倍數，如 4、7、8、9、13、16 是否也有這種特殊的算法。

壹、研究動機

當我們學到數學課本第 9 冊因數與倍數這個單元時，課本告訴我們凡是是 2、3、5、11 的倍數都有特殊的簡便方法可看出或算出，節省了少的時間。但是，我們常想爲什麼可以這麼算呢？是不是其他數的倍數，也有這種特殊的算法呢？

貳、研究目的

由數字尋求其規則性

一、2、4、8、16 倍數的規律性

二、3、9 倍數的規律性

三、 7 倍數的規律性

四、11 倍數的規律性

五、13 倍數的規律性

六、16 倍數的規律性

參、研究設備及器材

計算機、計算紙

肆、研究過程或方法

一、“ 2 ”的因數的探討

（一） 2 的倍數的探討

$14 = 1 \times 10 + 4$，其中 10 和 4 是 2 的倍數。

$148 = 1 \times 100 + 4 \times 10 + 8$，其中 100、10 和 8 是 2 的倍數。

$157 = 1 \times 100 + 5 \times 10 + 7$，其中 100、10 是 2 的倍數， 7 不是 2 的倍數，故 157 不是 2 的倍數。所以，只要末尾數爲 2 的倍數，則必爲 2 的倍數。

（二） 4 的倍數的探討

$136 = 1 \times 100 + 3 \times 10 + 6$，其中 100 和 $3 \times 10 + 6$ 是 4 的倍數。

$3564 = 3 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 4$，其中 1000、100 和 $6 \times 10 + 4$ 是 4 的倍數。所以，只要末尾兩數爲 4 的倍數，則必爲 4 的倍數。

（三） 8 的倍數的探討

$1782 = 1 \times 1000 + 7 \times 100 + 8 \times 10 + 2 \times 1$

（四）16 的倍數的探討

$178425 = 1 \times 100000 + 7 \times 10000 + 8 \times 1000 + 4 \times 100 + 2 \times 10 + 5$

所以，只要末尾兩數爲 8 的倍數，則必爲 8 的倍數。

（五）歸納

1. 有“ 2 ”的因數的探討（ $2^1 = 2$）

$$\overset{千}{a}\overset{百}{b}\overset{十}{c}\overset{個}{d} = a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d$$

$$= abc \times 10 + d \quad （\because\ 10 + d\ 是\ 2\ 的倍數）$$

所以 d 是 2 的倍數。

2. 有“ 4 ”的因數的探討（ $2^2 = 4$）

$$\overset{千}{a}\overset{百}{b}\overset{十}{c}\overset{個}{d} = a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d$$

$$= ab \times 100 + c \times 10 + d \quad （\because 100\ 是\ 4\ 的倍數）$$

所以只要 $c \times 10 + d$，一個數的末尾兩數爲 4 的倍數，則 abcd 必有 4 的因數。

3. 有“ 8 ”的因數的探討（ $2^3 = 8$）

千 百 十 個
$abcd = a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d$ （ ∵1000 是 8的倍數）

所以只要 $b \times 100 + c \times 10 + d$，一個數的末尾三數爲 8 的倍數，則 a b c d 必有 8 的因數。

（六）結論

一個數的末尾 n 數是 2^n 的倍數，則此數必有 2^n 的倍數。

二、“ 3 ”的因數的探討（$1 \div 3 = 0.333\text{---} = 0.\bar{3}$）

$10 \div 3 = 3$ 餘 1　　$100 \div 3 = 33$ 餘 1　　$1000 \div 3 = 333$ 餘 1

$\therefore\ 10 = 3 \times 3 + 1$　　$100 = 3 \times 33 + 1$　　$1000 = 3 \times 333 + 1$

千 百 十 個
$abcd = a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d$

$= a(3K_1 + 1) + b(3K_2 + 1) + c(3K_3 + 1) + d$

$= 3(aK_1 + bK_2 + cK_3) + a + b + c + d$

∴故只要 $a + b + c + d$ 之各數和是 3 的倍數，則 a b c d 爲 3 的倍數。

三、“ 9 ”的因數的探討（$1 \div 9 = 0.\bar{1}$）

$10 \div 9 = 1$ 餘 1　　$100 \div 9 = 11$ 餘 1　　$1000 \div 9 = 111$ 餘 1

$\therefore\ 10 = 9 \times 1 + 1$　　$100 = 9 \times 11 + 1$　　$1000 = 9 \times 111 + 1$

千 百 十 個
$abcd = a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d$

$= a(9K_1 + 1) + b(9K_2 + 1) + c(9K_3 + 1) + d$

$= 9(aK_1 + bK_2 + cK_3) + a + b + c + d$

故只要 $a + b + c + d$ 之和是 9 的倍數，則 a b c d 爲 9 的倍數。

四、“ 7 ”的因數的探討（$1 \div 7 = 0.\overline{142857}$）

$10 \div 7 = 1$ 餘 3　　　　$100 \div 7 = 14$ 餘 2

$1000 \div 7 = 142$ 餘 6　　　$10000 \div 7 = 1428$ 餘 4

$100000 \div 7 = 14285$ 餘 5　$1000000 \div 7 = 142857$ 餘 1

利用 $1000 \div 7 = 142$ 餘 6 即是不足 1 及 $1000000 \div 7 = 142857$ 餘 1

尋找規律。

$abcdefg = a \times 10^6 + b \times 10^5 + c \times 10^4 + d \times 10^3 + e \times 10^2 + f \times 10 + g =$
$a \times 10^6 + bcd \times 10^3 + efg$
$= a(7K_1 + 1) + bcd(7K_2 - 1) + efg$

只要 $a - bcd + efg$，一數由右至左每三位一組，奇數組和減偶數組和的差是 7 的倍數，則 abcdefg 必有 7 的因數。

五、“ 11 ”的因數的探討（$1 \div 11 = 0.\overline{09}$）

（一） $10 \div 11 = 0$ 餘 10（不是 1）　　　$100 \div 11 = 9$ 餘 1

$1000 \div 11 = 90$ 餘 10 （不是 1）　　$10000 \div 11 = 909$ 餘 1

（二）$abcd = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10^1 + d$
$= a(11K_1 - 1) + b(11K_1 + 1) + c(11K_2 - 1) + d$
$= 11(aK_1 + bK_1 + cK_2) - a + b - c + d$
$= 11(aK_1 + bK_1 + cK_2) + [(b+d) - (a+c)]$

（三）故只要 $[(b+d) - (a+c)]$ 奇數位數字和偶數位數字和相差是 11 的倍數，則 abcd 必有 11 的因數。

六、“ 13 ”的因數的探討（$1 \div 13 = 0.07692307$---）

（一）$10 \div 13 = 0$ 餘 10（不是 1）　　$100 \div 13 = 7$ 餘 9

$1000 \div 13 = 76$ 餘 12　　　　$10000 \div 13 = 769$ 餘 3

$100000 \div 13 = 7692$ 餘 4　　　$1000000 \div 13 = 76923$ 餘 1

（二）$abcdefg = a \times 10^6 + bcd \times 10^3 + efg$
$= a(13K_1 + 1) + bcd(13K_2 - 1) + efg$
$= 13(aK_1 + bcdK_2) + a - bcd + efg$
$= 13(aK_1 + bcdK_2) + [(a+efg) - bcd]$

（三）故只要 $[(a+efg) - bcd]$，一數由右至左每三位一組奇數組和減偶數組和是 13 的倍數，則 abcdefg 必有 13 的因數。

伍、研究結果

在數學第九冊因數與倍數課程中，讓學童尋找數字的規律性進而學習分析與歸納，

能在探索因數與倍數單元學習中發掘學習數學的樂趣。

陸、討論

可以進而去探索質數中 17、19、23、29、31 等之規律性。

柒、結論

1. 質數中，1 ÷ a 爲有限小數只有 2.5，所 2.5 的判斷方式是一樣的，只要末尾 n 位數有 2 或 5 的倍數，則此數一定是 a 的倍數。
2. 有一正整數 a，1 ÷ a 爲循環小數，循環節的個數若爲奇數，例如 1 ÷ 3 ＝ 0.33333---， 1 ÷ 9 ＝0.11111---，1 ÷ 27 ＝0.037037---，1 ÷ a 有 n 個數循環，將 a 由右至左每 n 個一組，將各組和相加，若爲 a 的倍數，則此數必有 a 的因數。
3. 若循環節的個數爲偶數，例如 1 ÷ 11 ＝ 0.090909，1 ÷ 13 ＝0.0769230769，1 ÷ a 若有 n 個數循環，由右至左每 $\frac{n}{2}$ 個一組，再利用奇數組和偶數組和之差爲 a 的倍數，則此數必有 a 的因數。

捌、參考資料

康軒文教出版社第 9 冊因數與倍數