單步驟問題　⇨　兩步驟問題

⇨　三步驟問題

⇨　多步驟問題

小明有一些錢，他買了3枝5元的鉛筆，4塊

8元的橡皮擦後，身上還剩40元，請問小明

原有多少元?

該問題(四步驟)屬於哪一個階段的教材？

①國小中年級

②國小高年級

③國中一年級

國小中年級(不宜出現)、高年級及國中一年

級教材都出現這類的問題

不同年級的教學重點不同。

國小中年級教學重點：

①檢查是否能正確的使用加、減、乘、除運算

解決問題。

②使用多個算式記錄解題活動。

本題必須掌握加減互逆概念

5×3＝15……買鉛筆的錢

8×4＝32……買橡皮擦的錢

15＋32＝47…買鉛筆和橡皮擦的錢

47＋40＝87…原有的錢

答：小明原有87元

國小高年級教學重點：

①先使用算式填充題(等號的右邊只有括號)

記錄問題。

②再使用逐次減項的記法記錄解題活動。

用算式填充題記錄問題：

5×3＋8×4＋40＝( )

用逐次減項記法記錄解題活動：

5×3＋8×4＋40

＝15＋8×4＋40

＝15＋32＋40

＝47＋40

＝87

必須有列式的能力

國中一年級教學重點：

①先使用方程式記錄問題。

②再使用解方程式的記法(等量公理)

記錄解題活動。

用方程式記錄問題：

x－5×3－8×4＝40

用解方程式(等量公理)記法記錄解題活動：

x－5×3－8×4＝40

x－15－32＝40

x＝40＋15＋32

x＝87

小明有一些錢，他買了3枝5元的鉛筆，4塊

8元的橡皮擦後，身上還剩40元，請問小明

原有多少元?

算式填充題記錄問題 方程式記錄問題

5×3＋8×4＋40＝( ) x－5×3－8×4＝40

哪一種列式的方法比較簡單？

國小選擇哪一種列式的方法？為什麼？

二年級：

2-n-09：能在具體情境中，解決兩步驟問題

（加與減，不含併式）。

2-n-10：能在具體情境中，解決兩步驟問題

（加、減與乘，不含併式）。

三年級：

3-n-03：能用併式記錄加減兩步驟的問題。

3-n-07：能在具體情境中，解決兩步驟問題

（加、減與除，不含併式）。

3-n-08：能在具體情境中，解決兩步驟問題

（連乘，不含併式）。

四年級：

4-n-04：能在具體情境中，解決兩步驟問題，

並學習併式的記法與計算。

4-n-05：能做整數四則混合計算(兩步驟)。

五年級：

5-n-02：能在具體情境中，解決三步驟問題，

並能併式計算。

5-n-03：能熟練整數四則混合計算。

5-a-04：能將整數單步驟的具體情境問題列成

含有未知數符號的算式，並能解釋算

式、求解及驗算。

六年級：

6-n-05：能在具體情境中，解決分數的兩步驟

問題，並能併式計算。

6-n-08：能在具體情境中，解決小數的兩步驟

問題，並能併式計算。

6-a-01：能理解等量公理。

6-a-02：能將分數單步驟的具體情境問題列成

含有未知數符號的算式，並求解及驗

算。

先乘後加的兩步驟問題：

鉛筆一枝12元，甲先買了5枝，再買了20元的橡皮擦，共花多少元？

先算：12×5＝60

再算：60＋20＝80

答：共花了80元

二年級是否接受兩個直式紀錄？

鉛筆一枝12元，甲先買了5枝，再買了20元的橡皮擦，共花多少元？

用一個算式把做法記下來，讓別人知道你

先算什麼，後算什麼！

(12×5)＋20＝80　⇨　是否要記括號？

多步驟問題的運算次序

①先乘除後加減

②由左往右算

③括號先算

上述口訣是處理多步驟問題運算次序的依據

，這些口訣是怎樣發展出來的?

區分**運算次序**與**運算性質**

4-n-05：能做整數四則混合計算(兩步驟)。

4-a-02：能在四則混合計算中，應用數的

運算性質。

5-n-03：能熟練整數四則混合計算。

5-a-03：能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。

①先乘除後加減

②由左往右算

③括號先算

它們是三個獨立的口訣嗎?

它們是一個分割以幫助記憶的口訣嗎?

29－48÷3×4＋(3×4－7)＝?

如果它們是三個獨立的口訣，沒有人知道

上述問題的運算次序。

它們的優先順序為何?

括號先算是數學上區分運算次序的約定。

先乘除後加減，由左往右算，是數學上省略

括號的約定。

只省略了記錄（數學式子）的括號，心中的

括號是不可能省略的。

說說看，先算什麼？後算什麼？

①48÷3×4＝？

②29－48÷3×4＋(3×4－7)＝?

③13＋14－5－9＝？

你心中是否有括號區分運算次序?

先使用括號區分運算順序。

當括號愈來愈多時，記憶括號的運算次序變

成記憶上的負擔。

透過先乘除後加減，由左往右算的約定省略

括號的使用次數。

為什麼是先乘除後加減?

為什麼不是先加減後乘除?

為什麼是由左往右算?

為什麼不是由右往左算?

7＋2＋2＋2＋2＋2

⇩

7＋2×5

先乘除後加減

「**加、減**」，「**乘、除**」運算都有，

但是沒有括號，要先算乘和除的部份

由左往右算

算式中都是乘和除，但是沒有括號，

要由左往右算。

算式中都是加和減，但是沒有括號，

要由左往右算。

由左往右算是兩組口訣

它們是利用什麼約定來省略括號？

①48÷3×4＝

②2×4＋3＝

③12×4＋36÷3＝

運算次序的約定

①括號的部份要先算。

②沒有括號的時候：算式中加減乘除都有

時，要先算乘和除的部份。

③沒有括號的時候：

算式中都是乘除時，要由左往右算，

算式中都是加減時，也要由左往右。

29－48÷3×4＋(3×4－7)＝?

請說明運算次序的約定

三年級：

3-n-03：能用併式記錄加減兩步驟的問題。

不用括號來溝通先算的部份，學生的記法

是由左往右依序計算

教師布題時應迴避併式時會形成

**「a－(b＋c)」**或**「a－(b－c)」**等問題。

運算次序的約定

括號先算 ⇨ 先乘除後加減

⇨ 由左往右算(乘與除)

⇨ 由左往右算(加與減)

3-n-03的教學目的是經驗併式的記法，

不可以要求學生精熟，不引入也沒有關係

由左往右算(加與減)是最不優先的約定

3-n-03讓學生誤以為是最優先的約定

四年級：兩步驟問題

括號先算、先乘除後加減、由左往右算，

其中一個約定

括號先算：13－(2＋5)＝13－7＝6

7×(5－2)＝7×3＝21

先乘除後加減：5＋3×4＝5＋12＝17

12－6÷2＝12－3＝9

由左往右算：12＋3－5＝15－5＝10

12÷3×2＝4×2＝8

五年級：三步驟問題

括號先算、先乘除後加減、由左往右算，

其中二個約定

括號先算，再先乘除後加減：

21＋(2＋5)×2＝21＋7×2＝21＋14＝35

42－3×(7－2)＝42－3×5＝42－15＝27

括號先算，再由左往右算：

21－(3＋5)－2＝21－8－2＝13－2＝11

12－3－(2＋5)＝12－3－7＝9－7＝2

先乘除後加減，再由左往右算：

12＋3×5－4＝12＋15－4＝27－4＝23

12－3＋12÷2＝12－3＋6＝9＋6＝15

六年級：很多步驟問題

括號先算、先乘除後加減、由左往右算，

其中多個約定(包含括號內也是多步驟)

12＋6×4÷(3＋5)＋7

＝12＋6×4÷8＋7

＝12＋24÷8＋7

＝12＋3＋7

＝15＋7

＝22

逐次減項的記法

5×(3＋8)＋40

＝5×11＋40

＝55＋40

＝95

請問95是計算那一個算式的答案?

①55＋40

②5×(3＋8)＋40

③每一個算式

5＋3＝8－2＝6 5

＋3

8

－2

6

你接受上面橫式或直式的記法嗎?

5＋3＝8－2＝6

不接受橫式記法：

等號滿足遞移性。

接受直式記法：

直式中的橫線表示運算的結果。

5×(3＋8)＋40

＝5×11＋40

＝55＋40

＝95

**◎**以前學過的算式只有一個等號，為什麼可以

用連等號來記錄？

上述記法是詳細的記法嗎？

因為：5×(3＋8)＋40＝5×11＋40

5×11＋40＝55＋40

55＋40＝95

所以：5×(3＋8)＋40＝95

這是比較詳細的記法，主要的概念是

等號的遞移性。

可以簡化上述記法嗎？

將前面的記法摘要記成：

5×(3＋8)＋40

＝5×11＋40

＝55＋40

＝95

逐次減項是摘要的記法。

省略『所以5×(3＋8)＋40＝95』，

教師應檢查答案95的意義。

因為：a=b，b=c，c=d

所以：a=d

摘要記成：a＝b＝c＝d

未知數發展可區分成三個層次：

層次一：一個位置的概念。

層次二：傳統的未知數概念。

層次三：一個可以運算的數

（理解未知數定理的意義）。

層次一：一個位置的概念

5＋( )＝8

　未知數的角色只是一個位置， 該位置填入

某些數字後，就可以讓算式成立，但是，

目前不知道可以填入的數字是什麼。

當學童有足夠解題的經驗，知道那個位置

裡面一定可以填入一個確定的數字，此

時，就可以使用x或甲等符號來替代( )。

層次二：傳統的未知數概念

5746＋x ＝10832

5746＋甲＝10832

x或甲代表(或替代)某一個確定的數字，

只是該數字目前未知。

用x或甲代表未知數，在概念上沒有難度

的差異，只有習慣與不習慣使用的區別。

5-a-04：能將整數單步驟的具體情境問題列

成含有未知數符號的算式，並能解

釋算式、求解及驗算。

6-a-02：能將分數單步驟的具體情境問題列

成含有未知數符號的算式，並求解

及驗算。

層次三：一個可以運算的數

ｘ雖然是一個目前不知道等於多少的未知

數，但是，只要它是一個數，就能與其它的

數一起做運算，而且順從運算所有的性質

如果未知數只是位置的概念或傳統的未知數

概念，學童的想法只能算是算術，如果未知

數的角色是代表一個可以運算的數，所進

行的活動才是代數。

由未知數是否能像已知數一樣被運作，可以

判斷是算術概念還是代數概念。

當一個一元一次方程式等號兩邊都有未知數

時，才能算是真正的代數問題

它們是代數問題或算術問題

①y×3＋17＝25

②y×3＝y＋12

7-a-03：能理解一元一次方程式及其解的意義

，並能由具體情境中列出一元一次方

程式。

7-a-04：能以等量公理解一元一次方程式，並做驗算。

7-a-05：能利用移項法則來解一元一次方程式並做驗算。

5＋( )＝8 或 5＋x＝8

①國小低年級解題策略：

　　透過往上數算出答案

②國小中、高年級解題策略：

　　加減互逆：8－5＝3

③國小六年級、國中解題策略：

　　等量公理：兩邊同時減5

(x＋3)×3＋5＝32

引入等量公理前，學童有能力解題嗎?

引入等量公理後，學童有能力解題嗎?

(x＋3)×3＋5＝32

①加減互逆(改問題記錄)。

②加減互逆(透過位置或傳統未知數)

③等量公理

④未知數定理

①加減互逆(改問題記錄)

透過線段圖重新表徵問題方式，將原問題

改記成等號右邊只有括號的算式填充題

**(x＋3)×3＋5＝32**

🢧 **(32－5) ÷3－3＝( )**

②加減互逆(透過位置或傳統未知數)

(x＋3)×3＋5＝32

🢧 { }＋5＝32

🢧 { }＝27

(x＋3)×3＝27

🢧 [ ]×3＝27

🢧 [ ]＝9

x＋3＝9

🢧 x＝6

③等量公理

(x＋3)×3＋5＝32

(x＋3)×3＝27

(x＋3)＝9

x＝6

④未知數定理

(x＋3)×3＋5＝32

3x＋9＋5＝32

3x＝18

x＝6

先乘後加的兩步驟問題：

鉛筆一枝12元，甲先買了5枝，再買了20元的橡皮擦，共花多少元？

(1)用兩個算式記錄解題活動

12×5＝60，60＋20＝80

(2)用併式記錄解題活動

12×5＋20＝80

(3)用算式填充題來列式

12×5＋20＝( )

(4)先列式，再用逐次減項的記法記錄解題活動

12×5＋20

＝60+20

＝80