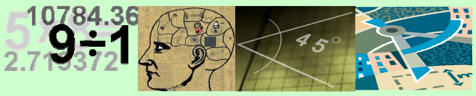
TAAN-99-2 數學會社八年級試題　　班級：　　　姓名：

MATHEMATICS



日期：100/03/02

➲觀察、歸納與猜想➲：

透過觀察若干具體實例，發現存在它們之中的某種帶有律性的東西，然而我們相信它具有普遍性的意義，能對更多一般的實例同樣適用，從而把它當作一般規律和結論，這種發現規律和結論的方法就稱做**歸納法**，歸納出來的規律和結論一般說來還只是一種猜想，是否正確，還有待進一步的證明。

➲數列與級數➲➔➔➔等差數列 arithmetic sequence、等差級數 arithmetic series

※數列 a_1，a_2，a_3，…，a_{n-1}，a_n，…，其中當 $a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=\cdots$ 時，
　我們稱此數列為*等差數列*。

(1) 令 $a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=\cdots=d$，則稱 d 為該數列的*公差* common difference。

(2) 等差數列的單調性：

當 d＝0，則 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_{n-1}=a_n=\cdots$

當 d＞0，則 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{n-1}<a_n<\cdots$

當 d＜0，則 $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_{n-1}>a_n>\cdots$

(3) 等差數列一般項：$\boxed{a_n=a_k+(n-k)d}$，$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d}$

(4) 等差中項：若 a_1，a_2，a_3 成等差數列，則 a_2 稱作 a_1 與 a_3 的*等差中項* arithmetic mean，且 $\boxed{a_2=\dfrac{a_1+a_3}{2}}$

※若數列 a_1，a_2，a_3，…，a_{n-1}，a_n，…，為等差數列，
　則 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n+\cdots$ 稱為*等差級數*，

※令 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$，則稱 S_n 為等差級數*前 n 項的和*

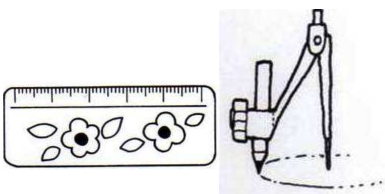
※$S_n-S_{n-1}=a_n$

※等差級數和的公式：

(1) 等差級數的對稱性：$\boxed{a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=a_k+a_{n-k+1}=\cdots,}$

(2) 等差級數前 n 項的和 $\boxed{S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}}$

(3) 等差級數的和＝中央項×項數　或　中間兩項的和×項數的一半



a_3，…，a_{n-1}，a_n，…，其中任一項均不為 0，當$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\cdots$時，

我們稱此數列為等比數列。

(1)令$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\cdots=r\ (r\neq 0)$，則稱 r 為該數列的公比 common ratio。

(2) $r=1$ 時，則$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_{n-1}=a_n=\cdots$

(3) $r>0$ 時，a_1，a_2，a_3，…，a_{n-1}，a_n，…，為同號數

(4) $r<0$ 時，a_1，a_2，a_3，…，a_{n-1}，a_n，…，為異號數

(5)若a_1，a_2，a_3成等比數列，則a_2稱作a_1與a_3的*等比中項* common ratio mean，且$\boxed{a_2^2=a_1\times a_3}$

等比級數和的公式：

若數列a_1，a_2，a_3，…，a_{n-1}，a_n，…，為等比數列，則$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n+\cdots$稱為等比級數，令$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$，則稱$S_n$為等比級數前 n 項的和

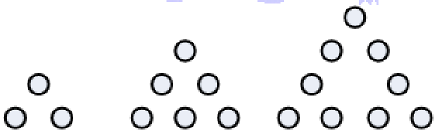
(1) $r=1$ 時，$S_n=na_1$

(2) $r\neq 1$ 時，$S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

試題練習

Question1

下圖中每個圖是由若干盆花組成的形如三角形的圖案，每條邊(包括兩個頂點)有 n(n＞1)盆花，每個圖案花盆的總數和是 S，按此規律推斷 S 與 n 的關係式為？



n=2 S=3　n=3 S=6　n=4 S=9　　A： S=3n-3

Question2

平面上有若干條直線，當下列情形時，可將平面最多分成幾部分。

(1) 有 1 條直線時，最多分成 1+1 部分

(2) 有 2 條直線時，最多分成 1+1+2 部分

(3) 有 3 條直線時，最多分成 1+1+2+3 部分

(4) 有 n 條直線時，最多分成 1＋1＋2＋3＋…＋n 部分

Question3

將一個圓形紙片用直線劃分成大小不限的若干紙片，如果分成的小紙片不少於 2004，那麼至少要畫的直線的條數是？(A)61 (B)62 (C)63 (D)64

A：(C)63　　S：$1+\frac{n(n+1)}{2}\leq 2004$,n最小整數值＝63

Question4

將1、2、3、4、5、6、7任意排列成一個七位數，觀察相鄰的兩個數字。如果順序恰是「小大」，則稱出現了一次上升。例如：七位數中「1542376」出現了三次上升（發生在15、23、37）。今建華將1、2、3、4、5、6、7排列成「25a7b1c」後，按照同樣的計算方式，發現這個七位數出現了三次上升。則（a，b，c）＝？（請列出所有可能的答案）

A：（3，4，6）、(3，6，4)、(4，3，6)、(4，6，3)

S：因為2→5上升，a→7必上升，1→c必上升，所以5→a不可能再上升，a=3或4

a=3時，b=4，c=6或b=6，c=4；a=4時，b=3，c=6或b=6，c=3

Question5

阿草伸出左手，由大拇指開始數1，接著食指數2，中指數3，無名指數4，小指數5，再無名指數6，中指數7，食指數8，回到大拇指數9，再食指數10，中指數11，……如此一直下去，則

(1)當數到1234時，是數到那根手指頭？　答：食指

(2)從1數到1234，大拇指共數了幾次？　答：155

(3)從1數到1234，中拇指共數了幾次？　答：308

解：

大拇指	食指	中指	無名指	小指
1	2	3	4	5
	8	7	6	
9	10	11	12	13
	16	15	14	
…	…	…	…	…
1225	1226	1227	1228	1229
	1232	1231	1230	
1233	1234			

154組

(1234÷8)=154...2

Question6

數列$\langle a_n \rangle$共有200項，其中任意連續7項的和皆為33。已知首項為5，末項為1，$a_{122}=7$，$a_{87}+a_{173}=16$，$a_8+a_{161}=11$，$a_5+a_{86}=6$，求a_{70}、a_{100}、a_{181}。

答：$a_{70}=6$，$a_{100}=-3$，$a_{181}=8$

解：∵ 任意連續7項的和皆相等　∴ 每7項循環一次

例如：$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8 \Rightarrow a_1=a_8$

$a_1=a_{1+7k}$，$a_2=a_{2+7k}$，$a_3=a_{3+7k}$，$a_4=a_{4+7k}$，$a_5=a_{5+7k}$，$a_6=a_{6+7k}$，$a_7=a_{7+7k}$

首項$a_1=5$，末項$a_{200}=1$，又$a_{200}=a_4$　∴ $a_4=1$　$a_{122}=7$，又$a_{122}=a_3$　∴ $a_3=7$

$a_{87}+a_{173}=16$，又$a_{87}=a_3$，$a_{173}=a_5$　∴ $a_3+a_5=16 \Rightarrow 7+a_5=16$，$a_5=9$

$a_8+a_{161}=11$，又$a_8=a_1$，$a_{161}=a_7$　∴ $a_1+a_7=11 \Rightarrow 5+a_7=11$，$a_7=6$

$a_5+a_{86}=6$，又$a_{86}=a_2$　∴ $a_5+a_2=6 \Rightarrow 9+a_2=6$，$a_2=-3$

∵ $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=33$　∴ $5+(-3)+7+1+9+a_6+6=33 \Rightarrow a_6=8$

故$a_1=5$，$a_2=-3$，$a_3=7$，$a_4=1$，$a_5=9$，$a_6=8$，$a_7=6$

$\Rightarrow a_{70}=a_7=6$，$a_{100}=a_2=-3$，$a_{181}=a_6=8$　答：$a_{70}=6$，$a_{100}=-3$，$a_{181}=8$

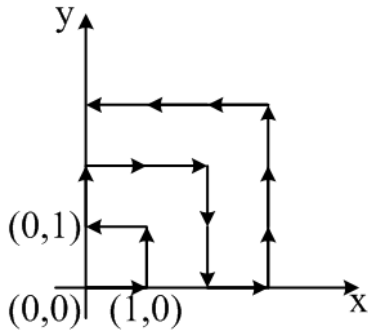
Question7 在直角坐標平面的第一象限中，把坐標都是整數的點依下列方式編序：

第 1 點為(0，0)，第 5 點為(0，2)，第 9 點為(2，0)

第 2 點為(1，0)，第 6 點為(1，2)，第 10 點為(3，0)

第 3 點為(1，1)，第 7 點為(2，2)

第 4 點為(0，1)，第 8 點為(2，1)



依右圖箭頭之順序，第 1999 點的坐標為？

$44^2=1936, 45^2=2025$

第1936點, 坐標為$(0,43)$

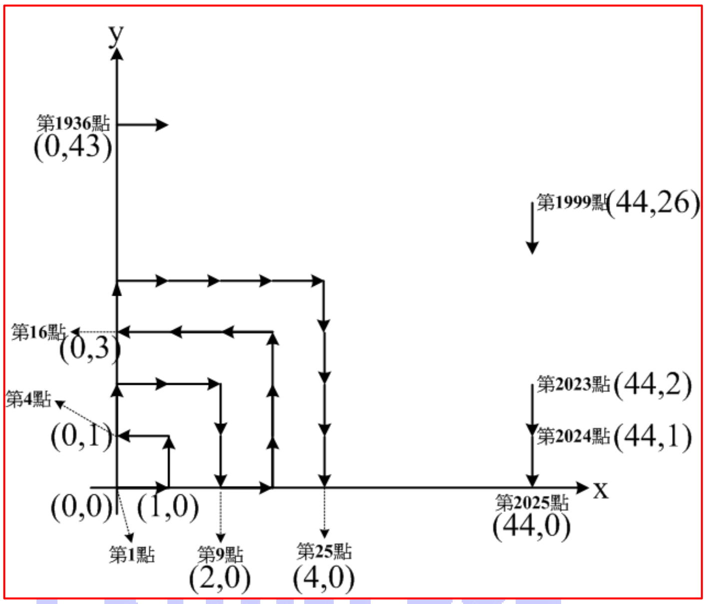
第2025點, 坐標為$(44,0)$

第2024點, 坐標為$(44,1)$

第2023點, 坐標為$(44,2)$

⋮　　　⋮

第 1999點, 坐標為$(44,26)$



Question8

有 2010 個數排成一列，其中任意相鄰的三個數都會滿足：中間的數等於前後兩數的和。若第一個數為－3，第二個數為 8，則這 2010 個數的和為何？(A) 8 (B) 5 (C) 0 (D) －3

解：－3、8、11、3、－8、－11、－3、8、11、3、－8、－11、－3、……

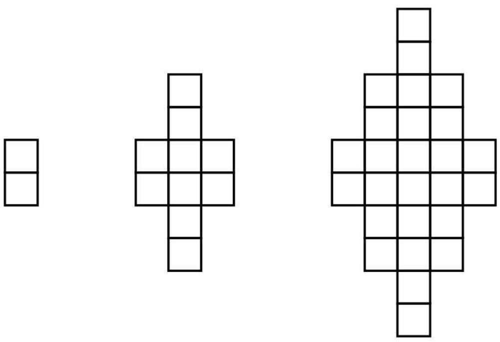
6 個數形成一循環且每個循環的和為 0

2010÷6＝335…0，2005 **個數的和為** 0

Question9

如圖，圖一、二、三分別包含了 2、10、26 個小正方形，若依此規則排列下去，

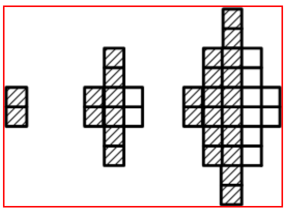
試問圖三十中有＿＿＿＿＿＿個小正方形。



圖一　　圖二　　圖三

答：3482

解：2[2＋6＋10＋…＋(2＋4×29)]－(2＋4×29)＝3482



Question10

觀察下列三表中，正方形格內之數字的生成規律：

1

(一)

2	2	2
2	1	2
2	2	2

(二)

3	3	3	3	3
3	2	2	2	3
3	2	1	2	3
3	2	2	2	3
3	3	3	3	3

(三)

假設表(一)的數字和為a_1，表(二)的數字和為a_2，表(三)的數字和為a_3，若 k 為大於 1 的正整數，由上面的生成規律，設表(k－1)的數字和為a_{k-1}，表(k)的數字和a_k，而且a_k－a_{k-1}＝880，則 k 值為？

解：

$$a_k - a_{k-1} = k\left[4(2k-1)-4\right] = 880 \Rightarrow k(k-1) = 110 \Rightarrow k = 11$$

Question11

給出兩列數：1，3，5，7，…，1991；1，6，11，16，…，1991，則同時出現在兩列數中的數共有多少個？

(A) 201 (B) 200 (C) 199 (D) 198

解：兩列數中同時出現的為 1、11、21、……、1991，共有（1991－1）÷10＋1＝200

P. S. 兩等差數列的共同項所形成的數列仍為等差數列，且其公差為原兩數列公差之最小公倍數。

Question12

數列$x_1, x_2, x_3, \cdots x_{19}, x_{20}$滿足$\dfrac{x_1}{x_1+1} = \dfrac{x_2}{x_2+3} = \dfrac{x_3}{x_3+5} = \cdots = \dfrac{x_{20}}{x_{20}+39}$,

又$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{19}+x_{20}=1200$,則$x_{13}=?$

答：75

$$\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \frac{x_3}{x_3+5} = \cdots = \frac{x_{20}}{x_{20}+39},$$

$$\Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1} = \frac{x_2+3}{x_2} = \frac{x_3+5}{x_3} = \cdots = \frac{x_{20}+39}{x_{20}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{x_1} = 1+\frac{3}{x_2} = 1+\frac{5}{x_3} = \cdots = 1+\frac{39}{x_{20}}$$

解：$\Rightarrow \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{3}{x_2} = \dfrac{5}{x_3} = \cdots = \dfrac{39}{x_{20}} \Rightarrow x_1 : x_2 : x_3 : \cdots : x_{20} = 1:3:5:\cdots:39$

令$x_1=r$，$x_2 = 3r$，$x_3 = 5r$，$\cdots$，$x_{20} = 39r$

代入$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{20}=1200 \Rightarrow r+3r+5r+\cdots+39r = 1200$

$$\frac{1}{2}\times 20\times(r+39r) = 1200 \Rightarrow r = 3 \quad \therefore x_{13} = r+(13-1)\times 2r = 75$$

Question13

有一等差級數，若 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^2$，求 $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{99} - a_{100} = ?$

解:

$S_1 = a_1 = 1^2 = 1$ ， $S_2 = a_1 + a_2 = 2^2 = 4$ ， $a_2 = 4 - 1 = 3$

公差 $d = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$

求值式 $= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{99} - a_{100}) = -d \times 50 = -100$

Question14

已知數列 $\langle a_n \rangle$ 是公差為 3 的等差數列，則 $a_1 + a_4 + a_7 + \cdots\cdots + a_{46} = 60$，試求

$a_5 + a_6 + a_9 + a_{10} + \cdots\cdots + a_{45} + a_{46} + a_{49} + a_{50} = ?$　　答:378

解:

$a_1 + a_4 + a_7 + \cdots\cdots + a_{46} = 60$

$\dfrac{16(a_1 + a_{46})}{2} = 60 \Rightarrow \dfrac{16(a_1 + a_1 + 45d)}{2} = 60$

$16(2a_1 + 135) = 120 \Rightarrow a = -\dfrac{255}{4}$

求值式 $= (a_5 + a_6) + (a_9 + a_{10}) + \cdots + (a_{45} + a_{46}) + (a_{49} + a_{50})$

$= \dfrac{12[(a_5 + a_6) + (a_{49} + a_{50})]}{2} = \dfrac{12(a_1 + 4d + a_1 + 5d + a_1 + 48d + a_1 + 49d)}{2}$

$= \dfrac{12(4a_1 + 106d)}{2} = \dfrac{12(-255 + 318)}{2} = \dfrac{12 \times 63}{2} = 378$

Question15 等比數列、等比級數

已知 $\sqrt{a_2 + 2a_1} + \sqrt{a_3 + 2a_2} + \sqrt{a_4 + 2a_3} + \cdots\cdots + \sqrt{a_{10} + 2a_9} = 0$，若 $a_1 = 2$，則 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{10}$ 之值為何？(A) 682 (B) −682 (C) 342 (D) −342

$a_2 + 2a_1 = 0, a_3 + 2a_2 = 0, a_4 + 2a_3 = 0, \cdots, a_{10} + 2a_9 = 0$

$a_2 = -2a_1, a_3 = -2a_2, a_4 = -2a_3, \cdots, a_{10} = -2a_9$

$\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \dfrac{a_4}{a_3} = \cdots = \dfrac{a_{10}}{a_9} = -2$(公比 r)

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{10} = \dfrac{2[1-(-2)^{10}]}{1-(-2)} = \dfrac{2 \times (-1023)}{3} = -682$

Question16 等比數列、等比級數

給定一數列：1、9、9、6 進行如下的操作：對每兩個相鄰的項，做一次減法，由右邊的數減去左邊的數，把差寫在這兩項的中間；當你完成第一輪操作時，產生了七個數構成的數列：。然後對此新數列再做一次如同上述規定的操作，此為第二輪操作。得到 13 個數的數列：1、7、8、1、9、−9、0、9、9、−12、−3、9、6。同樣的操作共進行 200 次，到第 200 輪為止。(1) 試求到第 200 輪時，此數列各項的總和為？(2) 試求到第 200 輪時，此數列共有多少項？答：(1) 1025 (2) $3 \times 2^{200} + 1$

解：(1) 1＋9＋9＋6＝25　1＋8＋9＋0＋9＋(−3)＋6＝30

1＋7＋8＋1＋9＋(−9)＋0＋9＋9＋(−12)＋(−3)＋9＋6＝35

25、30、35、…第 200 輪時，此數列各項的總和為第 201 項＝25+(201−1)×5=1025

(2) 4、7、13、…、第 201 項=4+(3+6＋12+…＋ a_{200})=$4 + \dfrac{3(2^{200}-1)}{2-1} = 4 + 3 \times 2^{200} - 3 = 3 \times 2^{200} + 1$