

# 國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域

## (一)基本理念

數學的學習注重循序累進的邏輯結構，因此，過去國內外數學教材的演進，概遵循此邏輯結構，以保證數學教育的穩定性。再者，數學是較能進行國際性評比的學習領域，教學的成效亦有較客觀的標準，因此，數學教育成效的評估應有其客觀基礎。

數學之所以被納入國民教育的基礎課程，有三個重要的原因：

### 1. 數學是人類最重要的資產之一

數學被公認為科學、技術及思想發展的基石，文明演進的指標與推手。數學結構之精美，不但體現在科學理論的內在結構中及各文明之建築、工技與藝術作品上，自身亦呈現一種獨特的美感。

### 2. 數學是一種語言

簡單的數學語言，融合在人類生活世界的諸多面向，宛如另一種母語。精鍊的數學語句，則是人類理性對話最精確的語言。從科學的發展史來看，數學更是理性與自然界對話時最自然的語言。

### 3. 數學是人類天賦本能的延伸

人類出生之後，即具備嘗試錯誤、尋求策略、解決問題的生存本能，並具備形與數的初等直覺。經過文明累積的陶冶與教育，使這些本能得以具體延伸為數學知識，並形成更有力量的思維能力。

九年一貫課程強調以學習者為主體，以知識的完整面為教育的主軸，以終身學習為教育的目標。在進入 21 世紀且處於高度文明化的世界中，數學知識及數學能力，已逐漸成為日常生活及職場裡應具備的基本能力。基於以上的認知，國民教育數學課程的目標，須能反映下列理念：(1)數學能力是國民素質的一個重要指標；(2)培養學生正向的數學態度，瞭解數學是推進人類文明的要素；(3)數學教學(含教材、課本及教學法)應配合學童不同階段的需求，協助學童數學智能的發展；(4)數學作為基礎科學的工具性特質。

基於上述理念，國民教育階段協助學童數學智能的發展，最為需要長期及多面向的關照，茲闡述如下：

1. 素質指標：要把每一位學生都帶上來，是九年一貫及國家教育政策既有的理念。在數學教育裡，強調每個學生都有權利要求受到良好的數學訓練，並充分認識重要的數學概念及提升厚實數學能力。教育應提供學生做有意義及有效率學習的機會，使學生能學好重要的核心數學題材，因為這些重要的數學概念和精熟的演算能力，是九年一貫所強調「帶著走」的能力。
2. 能力發展：學生能力的發展始於流利的基礎運算和推演、對數學概念的理解，然後懂得利用推論去解決數學問題，包括理解和解決日常問題，以及在不熟悉解答方式時，懂得自尋解決問題的途徑。抽象化能力始於能運用符

- 號、記號、模型、圖形或其他數學語言、清楚傳達量化、邏輯關係。發展邏輯思考，用來分析證據、提出支持或否定假設的論點。啟發學生自行在不同數學概念之間做連結，並連結數學與其他學習領域。學生要能將數學運用在日常生活中，學習欣賞數學，從而發展探究數學以及與數學相關學科的興趣。
- 3.能力主軸：除了數學知識外，演算能力、抽象能力及推論能力的培養是整個數學教育的主軸。這三者是連貫而非獨立分開的，也是培養學生數學能力的三個具體面向。所謂「數學能力」，是指對數學掌握的綜合性能力以及對數學有整體性的感覺。在學習數學時，一般重視的是觀念和演算，但學生的數學經驗(或數學感覺)的培養卻是同等重要。要確保學生能學好新數學題材的要素之一，旨在如何引導並利用學生的前置經驗(或感覺)，這種數學的經驗(或感覺)就是數學的直覺或直觀。學生數學能力的深化，奠基在揉合舊有的直觀和新的觀念或題材，進而擴展成一種新的直觀。在認知能力上，直觀是思維流暢的具體展現；在能力培養上，直觀讓學生能從根本上，擺脫數學形式規則的束縛，豐富學童在抽象層次上的想像力與觀察能力，這二者是兒童數學智能發展中的重要指標。
  - 4.演算能力：傳統數學教學上，常把觀念與演算截然二分。然數學運算或計算並不只是機械式計算操作而已。所謂能熟練數學的運算或計算，係指在能夠理解數學概念或演算規則的情況下，所進行的純熟操作。這種透過理解並能將觀念與計算結合的能力，才是演算能力。某類型數學問題演算的純熟，常能同時促使新舊數學觀念的連結與落實。演算亦是學童獲得新數學經驗的方法，新的經驗將會再形成學生下一階段新主題學習所需的具體經驗。以傳統的直式乘、除法為例，透過這種演算法，學童能充分運用加減法以及個位數乘法的能力；更重要的是能養成簡單心算的能力，進而勇於累積計算多位數的經驗。這種能力能讓學童對數字的內在邏輯有較流暢的感覺，而這種流暢感覺的回饋，則更能增強學童的自信心。相反的，沒有效率、容易造成錯誤的演算法，卻會加深學習的沮喪感，使學童逐漸放棄學習。
  - 5.數學溝通能力：溝通包括理解與表達兩種能力，所以，數學溝通一方面要能瞭解別人以書寫、圖形，或口語中所傳遞的數學資訊；另一方面，也要能以書寫、圖形，或口語的形式，運用精確的數學語言表達自己的意思。
  - 6.教材教法：數學課程的規劃、教科書呈現的方式及教學法均同等重要。能力指標、課程規劃與課本編排均要有合理性。課程、教學、教科書(包括教科書的文字)都是學生學習環境的一環，合理審慎地處理這些環節，將能讓學生專注於學習，減少學生失誤的挫折，提升學生的學習興趣。這三者的視野，都必須涵蓋整體教育過程。例如：在瞭解或歸納某些問題時，情境雖然有別，但其解題方式卻可能相似。要培養這種抽象能力，必須要有比較長期性的規劃。在傳統上，應用問題及其解題的教學，是小學生培養這種抽象能力的好方法。雖然，這些應用問題在進入國中後，都可運用代數方法來解答，但小學應用問題的教學，是利用兒童的生活經驗、直觀和(在培養中的)抽象思考

方法揉合在一起的活動。這是兒童在國中學習抽象的代數以及其他學科(例如：理化)時，絕佳的前置經驗，如同在能力主軸裡所強調的，這種直觀的培養，將是學童在國中學習好壞的基礎。因此，我們應該在小學教育中，放入適當的應用解題的題材。同樣地，培養抽象能力基礎的生活化情境，必須隨年級的增加與學生抽象能力的提高，做合理的調整，避免讓生活情境過分干擾數學的學習。

- 7.教師關懷：數學能力的養成是一個很複雜的過程，而且經常因人而異，因此任何單一的教本以及單一的教學法，都無法獨斷地兼顧各人的學習，甚至個人各時期的發展。除專業素養外，教師對學童的愛與關懷，是在數學學習過程中，幫助兒童渡過難關最重要的助力。當學習新的數學概念、新的演算規則，甚至舊題材的新表示方式時，學童都須藉由舊有的數學經驗來統合成新的直覺或邏輯經驗，而數學精確語言的抽象本質，常會加深學童學習的困難。這時，唯有依靠教師敏銳的觀察與分析，貼心地協助學生，結合其舊有的經驗往前到新的經驗，這正是因材施教的要點。老師的關懷，能讓學生對新的問題抱持著好奇心及擁有努力尋求問題的解答之意志力。學生具備這樣的學習態度，絕對是正面的。近年來許多老師努力採取和學童雙向溝通的教學方式，這是國內教學法非常積極且正面的發展。
- 8.對家長的建議：對於想輔導學童學習數學的家長，須以「學習數學應該是一種快樂的經驗」作為座右銘。在做家庭功課時，讓學童在專心一致的情境下學習數學，才能培養他們對數學的正面情緒與感覺。若心緒不集中，就容易造成計算失誤，導致過多的挫折感；而負面情緒的累積，則容易使學生放棄數學。當小孩的學習遭遇瓶頸或成績低落時，家長不宜過度焦慮，在督導小孩學習時，家長仍應儘量避免負面的情緒，不宜無理的強迫小孩做更多的學習。如果家長能用鼓勵的態度，深入瞭解小孩的學習困難，以小孩本身可理解的經驗做基礎，循序漸進的引導小孩走出困境(而不是死板的教導)，將比較有正面的效益。
- 9.數學史的重要性：在教師教學裡，引進與主題相關的數學史題材，對學童的學習會有很正面的意義，尤其能協助學童將抽象觀念具體化。因為不論在科技應用層面或思想突破方面，數學重要概念的演進確有其實用面的考量，因此提供具啟發性的數學史方面的讀物實屬必要。

以上所述都是在局部層次上如何協助學童落實數學能力。然而，整個大環境的經營，例如：學校行政的支持、教學環境的改善等，亦不能忽略，這些是數學教學的品質能否提升的重要關鍵。為了協助學童，教師與家長必須建造一個開放且豐富的數學資訊網路，包括大量的題庫、進階數學讀物、教師專業期刊、數學教學資源平臺、教學研究資料的透明化等。藉由各種資訊網路，讓教師能擁有豐富的參考資料，並與其他教師分享教學經驗；家長能有足夠的資訊來輔助子女學習，而且學童能據以自學。如能建立豐富且多元發展方向的流通資訊，對教學品質的促進將有明顯的效應。

## (二)課程目標

基於前節所述的基本理念，課程目標的規劃不僅應反映數學學習的特性，亦應考量環境條件的限制。首先是教學時數的限制。目前國民中小學數學學習領域教學的時數每週3-4節，僅足夠用來做課本教學。然而，數學學習領域新題材的學習(包括操作觀察、概念學習、新演算方法或應用問題解題等)，往往需要較寬裕的時間來融會貫通並做練習，故教師應找其他恰當的時間指導學生做習作。

在既有限制之下，九年一貫數學學習領域的課程綱要，是由下列四個原則來界定：

- 1.參考施行有年且有穩定基礎的傳統教材。
- 2.採用國際間數學課程必備的核心題材。
- 3.考慮數學作為科學工具性的特質。
- 4.現有學生能夠有效學習數學的一般能力。

具體而言，九年一貫數學學習領域的教學目標為：

- 1.第一階段(國小一至二年級)：能初步掌握數、量、形的概念，其重點在自然數及其運算、長度與簡單圖形之認識。
- 2.第二階段(國小三至四年級)：在數方面要能熟練自然數的四則與混合計算，培養流暢的數字感；另外，應初步學習分數與小數的概念。在量上則以長度的學習為基礎，學習各種量的常用單位及其計算。幾何上則慢慢發展以角、邊要素認識幾何圖形的能力，並能以操作認識幾何圖形的性質。
- 3.第三階段(國小五至六年級)：在小學畢業前，應能熟練小數與分數的四則計算；能利用常用數量關係，解決日常生活的問題；能認識簡單平面與立體形體的幾何性質，並理解其面積或體積之計算；能製作簡單的統計圖形。
- 4.第四階段(國中一至三年級)：在數方面，能認識負數與根號數之概念與計算方式，並理解坐標表示的意義。代數方面則要熟練代數式的運算、解方程式，並熟悉常用的函數關係。幾何方面要學習三角形及圓的基本幾何性質，認識線對稱與圖形縮放的概念，並能學習簡單的幾何推理。能理解統計與機率的意義，並認識各種簡易統計方法。

我們希望課程目標的達成，可以培養學生的演算能力、抽象能力、推論能力及溝通能力；學習應用問題的解題方法；奠定高中階段的數學基礎，並希望能培養學生欣賞數學的態度及能力。

### (三)能力指標

本綱要能力指標係參酌施行有年且有穩定基礎的傳統教材、國際間數學課程必備的核心題材、數學作為科學工具性的特質、現有學生能夠有效學習數學的一般能力等原則進行修訂。

數學學習領域將九年國民教育區分為四個階段：第一階段為國小一至二年級，第二階段為國小三至四年級，第三階段為國小五至六年級，第四階段為國中一至三年級。另將數學內容分為「數與量」、「幾何」、「代數」、「統計與機率」、「連結」等五大主題。

前四項主題的能力指標以三碼編排，其中第一碼表示主題，分別以字母 N、S、A、D 表示「數與量」、「幾何」、「代數」和「統計與機率」四個主題；第二碼表示階段，分別以 1、2、3、4 表示第一、二、三、四階段；第三碼則是能力指標的流水號，表示該細項下指標的序號。指標雖以主題與階段來區分，仍有若干能力指標採跨主題方式同時編列，如「數與量」、「幾何」，以強調其連結，此類指標皆以相關連結編碼註記。第五個主題「連結」亦以三碼編排，第一碼以字母 C 表示主題，第二碼分別以字母 R、T、S、C、E 表示察覺、轉化、解題、溝通、評析；第三碼流水號，表示該細項下指標的序號。

在編撰教材時，須注意數學內部連結的貫串，以強調解題能力的培養；數學外部的連結除了強調生活應用解題外，也要能適當結合其他學科教材的發展，讓學生能認識到數學與其他學科的關係。如果能在教材中適切呈現如何觀察問題、分析問題、提出解題的策略或方向；或者如何藉由分類、歸納、演繹、類比來獲得新知的過程，將對學生的智能發展、數學能力有莫大的幫助。一套好的數學課程或教科書，應能完整呈現數學思考的全貌，也因此教師、教科書編者、審查單位皆應顧及連結四項指標確實完成。

以下先就五大主題條列數學學習領域之能力指標，再依階段與年級條列能力指標及其細目。

## 1.五大主題能力指標

### 數與量

N-1-01	能說、讀、聽、寫 1000 以內的數，比較其大小，並做位值單位的換算。
N-1-02	能理解加法、減法的意義，解決生活中的問題。
N-1-03	能理解加、減直式計算。
N-1-04	能理解乘法的意義，解決生活中簡單整數倍的問題。
N-1-05	能在具體情境中，進行分裝與平分的活動。
N-1-06	能理解九九乘法。
N-1-07	能在具體情境中，解決加、減、乘之兩步驟問題(不含連乘)。
N-1-08	能做長度的實測，認識「公分」、「公尺」，並能做長度之比較與計算。
N-1-09	能做長度的簡單估測。
N-1-10	能認識容量、重量、面積(不含常用單位)。
N-1-11	能報讀時刻，並認識時間常用單位。
N-2-01	能說、讀、聽、寫 10000 以內的數，比較其大小，並做位值單位的換算。
N-2-02	能透過位值概念，延伸整數的認識到大數(含億、兆)。
N-2-03	能熟練整數加、減的直式計算。
N-2-04	能理解除法的意義，解決生活中的問題，並理解整除、商與餘數的概念。
N-2-05	能理解乘、除直式計算。
N-2-06	能在具體情境中，解決兩步驟問題(含除法步驟)。
N-2-07	能做整數四則混合運算，理解併式，並解決生活中的問題。
N-2-08	能在具體情境中，對大數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減之估算。
N-2-09	能在具體情境中，初步認識分數。
N-2-10	能認識真分數、假分數與帶分數，做同分母分數的比較、加減與整數倍計算，並解決生活中的問題。
N-2-11	能理解分數之「整數相除」的意涵。
N-2-12	能認識等值分數，並做簡單的應用。
N-2-13	能認識一位與二位小數，並做比較、直式加減及整數倍的計算。
N-2-14	能由長度測量的經驗，透過刻度尺的方式來認識數線，並標記整數。
N-2-15	能在數線上做整數與小數之比較與加、減的操作。

N-2-16	能在數線上標記小數，並透過等值分數，標記簡單的分數。
N-2-17	能做長度的實測，認識長度常用單位，並能做長度之比較與計算。
N-2-18	能做容量的實測，認識容量常用單位，並能做容量之比較與計算。
N-2-19	能做重量的實測，認識重量常用單位，並能做重量之比較與計算。
N-2-20	能使用量角器進行角度之實測，認識度的單位，並能做角度之比較與計算。
N-2-21	能認識面積常用單位，並能做面積之比較與計算。
N-2-22	能理解正方形和長方形的面積與周長公式。(S-2-08)
N-2-23	能認識體積，並認識體積單位「立方公分」。
N-2-24	能做時或分同單位的加減計算。
N-2-25	能用複名數的方法處理量相關的計算問題(不含除法)。
N-2-26	能做量的簡單估測。
N-3-01	能熟練整數乘、除的直式計算。
N-3-02	能熟練整數四則混合運算，並解決生活中的三步驟問題。
N-3-03	能理解因數、倍數、公因數與公倍數。
N-3-04	能認識質數、合數，並能用短除法做質因數分解。
N-3-05	能認識最大公因數、最小公倍數與兩數互質的意義，並用來將分數化成最簡分數。
N-3-06	能理解等值分數、約分、擴分的意義。
N-3-07	能理解通分的意義，並用來解決異分母分數的比較與加減問題。
N-3-08	能認識多位小數，並做比較、直式加減及整數倍的計算。
N-3-09	能理解分數(含小數)乘法的意義及計算方法，並解決生活中的問題。
N-3-10	能理解分數(含小數)除法的意義及計算方法，並解決生活中的問題。
N-3-11	能用直式處理小數的乘除計算(不含循環小數)。
N-3-12	能在具體情境中，對某數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除之估算。
N-3-13	能做分數與小數的互換，並標記在數線上。
N-3-14	能認識比率及其在生活中的應用。
N-3-15	能認識比、比值與正比的意義，並解決生活中的問題。
N-3-16	能認識導出單位並做簡單的應用。
N-3-17	能理解速度的概念與應用，認識速度的常用單位及換算，並處理相關的計算問題。

N-3-18	能由生活中常用的數量關係，運用於理解問題，並解決問題。(A-3-02)
N-3-19	能認識量的常用單位及其換算，並用複名數處理相關的計算問題。
N-3-20	能理解正方體和長方體的體積公式。(S-3-05)
N-3-21	能理解容量、容積和體積間的關係。
N-3-22	能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(S-3-06)
N-3-23	能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形面積。(S-3-07)
N-3-24	能理解簡單直立柱體的體積為底面積與高的乘積。(S-3-10)
N-3-25	能計算正方體或長方體的表面積。(S-3-11)
N-4-01	能理解質數、質因數分解、最大公因數、最小公倍數、互質的意義。
N-4-02	能熟練求質因數分解、最大公因數、最小公倍數的短除法，並解決生活中的問題。
N-4-03	能理解比例關係、連比、正比、反比的意義，並解決生活中的問題。
N-4-04	能熟練比例式的基本運算。
N-4-05	能認識負數、相反數、絕對值的意義。
N-4-06	能做正負數的比較與加、減、乘、除計算。
N-4-07	能將負數標記在數線上，理解正負數的比較與加、減運算在數線上的對應意義，並能計算數線上兩點的距離。
N-4-08	能熟練正負數的四則混合運算。
N-4-09	能認識指數的記號與指數律。
N-4-10	能認識科學記號。
N-4-11	能認識二次方根及其近似值。
N-4-12	能理解根式的四則運算。
N-4-13	能辨識數列的規則性。
N-4-14	能熟練等差數列與等差級數的樣式、記法與公式，並解決相關問題。
<b>幾何</b>	
S-1-01	能由物體的外觀，辨認、描述與分類簡單幾何形體。
S-1-02	能描繪或仿製簡單幾何形體。
S-1-03	能認識周遭物體中的角、直線和平面。
S-1-04	能認識生活周遭中平行與垂直的現象。
S-2-01	能認識平面圖形的內部、外部及其周界與周長。
S-2-02	能透過操作，將簡單圖形切割重組成另一已知簡單圖形。
S-2-03	能理解垂直與平行的意義。

S-2-04	能透過平面圖形的組成要素，認識基本平面圖形。
S-2-05	能透過操作，認識簡單平面圖形的性質。
S-2-06	能認識平面圖形全等的意義。
S-2-07	能理解旋轉角的意義。
S-2-08	能理解正方形和長方形的面積與周長公式。(N-2-22)
S-3-01	能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。
S-3-02	能透過操作，認識「三角形三內角和為 180 度」與「兩邊和大於第三邊」的性質。
S-3-03	能理解平面圖形的線對稱關係。
S-3-04	能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響，並認識比例尺。
S-3-05	能理解正方體和長方體的體積公式。(N-3-20)
S-3-06	能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(N-3-22)
S-3-07	能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形面積。(N-3-23)
S-3-08	能認識面的平行與垂直，線與面的垂直。
S-3-09	能認識球、直圓柱、直圓錐、直角柱與正角錐。
S-3-10	能理解簡單直立柱體的體積為底面積與高的乘積。(N-3-24)
S-3-11	能計算正方體或長方體的表面積。(N-3-25)
S-4-01	能理解常用幾何形體之定義與性質。
S-4-02	能指出滿足給定幾何性質的形體。
S-4-03	能透過形體之刻畫性質，判斷不同形體之包含關係。
S-4-04	能利用形體的性質解決幾何問題。
S-4-05	能理解畢氏定理及其逆敘述，並用來解題。
S-4-06	能理解外角和定理與三角形、多邊形內角和定理的關係。
S-4-07	能理解平面上兩平行直線의各種幾何性質。
S-4-08	能理解線對稱圖形的幾何性質，並應用於解題和推理。
S-4-09	能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
S-4-10	能根據直尺、圓規操作過程的敘述，完成尺規作圖。
S-4-11	能理解一般三角形的幾何性質。
S-4-12	能理解特殊三角形(如正三角形、等腰三角形、直角三角形)的幾何性質。
S-4-13	能理解特殊四邊形(如正方形、矩形、平行四邊形、菱形、梯形)與正多邊形的幾何性質。

S-4-14	能理解圖形縮放前後不變的幾何性質。
S-4-15	能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。
S-4-16	能理解三角形內心、外心、重心的意義與性質。
S-4-17	能理解圓的幾何性質。
S-4-18	能用反例說明一敘述錯誤的原因，並能辨識一敘述及其逆敘述間的不同。(A-4-19)
S-4-19	能針對問題，利用幾何或代數性質做簡單證明。(A-4-20)
<b>代數</b>	
A-1-01	能在具體情境中，認識等號兩邊數量一樣多的意義與 $<$ 、 $=$ 、 $>$ 的遞移律。
A-1-02	能在具體情境中，認識加法的交換律、結合律、乘法的交換律，並運用於簡化計算。
A-1-03	能理解加減互逆，並運用於驗算與解題。
A-2-01	能理解乘除互逆，並運用於驗算與解題。
A-2-02	能在具體情境中，理解乘法結合律，並運用於簡化計算。
A-2-03	能在四則混合計算中，運用數的運算性質。
A-3-01	能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律與其他乘除混合計算之性質，並運用於簡化計算。
A-3-02	能由生活中常用的數量關係，運用於理解問題，並解決問題。(N-3-18)
A-3-03	能認識等量公理。
A-3-04	能用含未知數符號的算式表徵具體情境之單步驟問題，並解釋算式與情境的關係。
A-3-05	能解決用未知數列式之單步驟問題。
A-3-06	能用符號表示簡單的常用公式。
A-4-01	能用符號代表數，表示常用公式、運算規則以及常見的數量關係(例如：比例關係、函數關係)。
A-4-02	能理解數的四則運算律，並知道加與減、乘與除是同一種運算。
A-4-03	能用 $x$ 、 $y$ 、 $\dots$ 符號表徵問題情境中的未知量及變量，並將問題中的數量關係，寫成恰當的算式(等式或不等式)。
A-4-04	能理解生活中常用的數量關係(例如：比例關係、函數關係)，恰當運用於理解題意，並將問題列成算式。
A-4-05	能理解等量公理的意義，並做應用。
A-4-06	能理解解題的一般過程，知道解出方程式或不等式後，還要驗算其解的合理性。

A-4-07	能熟練一元一次方程式的解法，並用來解題。
A-4-08	能理解一元一次不等式解的意義，並用來解題。
A-4-09	能理解二元一次方程式的意義。
A-4-10	能理解直角坐標系，並能計算坐標平面上兩點間的距離。
A-4-11	能在坐標平面上，畫出一次函數或二元一次方程式的圖形。
A-4-12	能熟練二元一次聯立方程式的解法，並用來解題。
A-4-13	能熟練乘法公式。
A-4-14	能認識多項式，並熟練其四則運算。
A-4-15	能理解畢氏(勾股)定理，並做應用。
A-4-16	能用因式分解或配方法，解出二次方程式，並用來解題。
A-4-17	能利用配方法，計算二次函數的最大值或最小值。
A-4-18	能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。
A-4-19	能用反例說明一敘述錯誤的原因。能辨識一個敘述及其逆敘述間的不同。(S-4-18)
A-4-20	能針對問題，利用幾何或代數性質做簡單證明。(S-4-19)
<b>統計與機率</b>	
D-1-01	能將資料做分類與整理，並說明其理由。
D-2-01	能報讀生活中常見的表格。
D-2-02	能認識並報讀生活中的長條圖、折線圖。
D-3-01	能整理生活中的資料，並製成長條圖、折線圖或圓形圖。
D-4-01	能利用統計量，例如：平均數、中位數及眾數等，來認識資料集中的位置。
D-4-02	能利用統計量，例如：全距、四分位距等，來認識資料分散的情形。
D-4-03	能以中位數、四分位數、百分位數，來認識資料在群體中的相對位置。
D-4-04	能在具體情境中認識機率的概念。
<b>連結</b>	
◎察覺	
C-R-01	能察覺生活中與數學相關的情境。
C-R-02	能察覺數學與其他領域之間有所連結。
C-R-03	能知道數學可以應用到自然科學或社會科學中。
C-R-04	能知道數學在促進人類文化發展上的具體例子。

◎轉化	
C-T-01	能把情境中與問題相關的數、量、形析出。
C-T-02	能把情境中數、量、形之關係以數學語言表出。
C-T-03	能把情境中與數學相關的資料資訊化。
C-T-04	能把待解的問題轉化成數學的問題。
◎解題	
C-S-01	能分解複雜的問題為一系列的子題。
C-S-02	能選擇使用合適的數學表徵。
C-S-03	能瞭解如何利用觀察、分類、歸納、演繹、類比等方式來解決問題。
C-S-04	能多層面的理解，數學可以用來解決日常生活所遇到的問題。
C-S-05	能瞭解一數學問題可有不同的解法，並嘗試不同的解法。
◎溝通	
C-C-01	能理解數學語言(符號、用語、圖表、非形式化演繹等)的內涵。
C-C-02	能理解數學語言與一般語言的異同。
C-C-03	能用一般語言與數學語言說明情境與問題。
C-C-04	能用數學的觀點推測及說明解答的屬性。
C-C-05	能用數學語言呈現解題的過程。
C-C-06	能用一般語言及數學語言說明解題的過程。
C-C-07	能用回應情境、設想特例、估計或不同角度等方式說明或反駁解答的合理性。
C-C-08	能尊重他人解決數學問題的多元想法。
◎評析	
C-E-01	能用解題的結果闡釋原來的情境問題。
C-E-02	能由解題的結果重新審視情境，提出新的觀點或問題。
C-E-03	能經闡釋及審視情境，重新評估原來的轉化是否得宜，並做必要的調整。
C-E-04	能評析解法的優缺點。

## 2.階段能力指標

### (1)第一階段能力指標（國小一至二年級）

數與量	
N-1-01	能說、讀、聽、寫 1000 以內的數，比較其大小，並做位值單位的換算。
N-1-02	能理解加法、減法的意義，解決生活中的問題。
N-1-03	能理解加、減直式計算。
N-1-04	能理解乘法的意義，解決生活中簡單整數倍的問題。
N-1-05	能在具體情境中，進行分裝與平分的活動。
N-1-06	能理解九九乘法。
N-1-07	能在具體情境中，解決加、減、乘之兩步驟問題(不含連乘)。
N-1-08	能做長度的實測，認識「公分」、「公尺」，並能做長度之比較與計算。
N-1-09	能做長度的簡單估測。
N-1-10	能認識容量、重量、面積(不含常用單位)。
N-1-11	能報讀時刻，並認識時間常用單位。
幾何	
S-1-01	能由物體的外觀，辨認、描述與分類簡單幾何形體。
S-1-02	能描繪或仿製簡單幾何形體。
S-1-03	能認識周遭物體中的角、直線和平面。
S-1-04	能認識生活周遭中平行與垂直的現象。
代數	
A-1-01	能在具體情境中，認識等號兩邊數量一樣多的意義與 $<$ 、 $=$ 、 $>$ 的遞移律。
A-1-02	能在具體情境中，認識加法的交換律、結合律、乘法的交換律，並運用於簡化計算。
A-1-03	能理解加減互逆，並運用於驗算與解題。
統計與機率	
D-1-01	能將資料做分類與整理，並說明其理由。

(2)第二階段能力指標(國小三至四年級)

數與量	
N-2-01	能說、讀、聽、寫 10000 以內的數，比較其大小，並做位值單位的換算。
N-2-02	能透過位值概念，延伸整數的認識到大數(含億、兆)。
N-2-03	能熟練整數加、減的直式計算。
N-2-04	能理解除法的意義，解決生活中的問題，並理解整除、商與餘數的概念。
N-2-05	能理解乘、除直式計算。
N-2-06	能在具體情境中，解決兩步驟問題(含除法步驟)。
N-2-07	能做整數四則混合運算，理解併式，並解決生活中的問題。
N-2-08	能在具體情境中，對大數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減之估算。
N-2-09	能在具體情境中，初步認識分數。
N-2-10	能認識真分數、假分數與帶分數，做同分母分數的比較、加減與整數倍計算，並解決生活中的問題。
N-2-11	能理解分數之「整數相除」的意涵。
N-2-12	能認識等值分數，並做簡單的應用。
N-2-13	能認識一位與二位小數，並做比較、直式加減及整數倍的計算。
N-2-14	能由長度測量的經驗，透過刻度尺的方式來認識數線，並標記整數。
N-2-15	能在數線上做整數與小數之比較與加、減的操作。
N-2-16	能在數線上標記小數，並透過等值分數，標記簡單的分數。
N-2-17	能做長度的實測，認識長度常用單位，並能做長度之比較與計算。
N-2-18	能做容量的實測，認識容量常用單位，並能做容量之比較與計算。
N-2-19	能做重量的實測，認識重量常用單位，並能做重量之比較與計算。
N-2-20	能使用量角器進行角度之實測，認識度的單位，並能做角度之比較與計算。
N-2-21	能認識面積常用單位，並能做面積之比較與計算。
N-2-22	能理解正方形和長方形的面積與周長公式。(S-2-08)
N-2-23	能認識體積，並認識「立方公分」的單位。
N-2-24	能做時或分同單位的加減計算。
N-2-25	能用複名數的方法處理量相關的計算問題(不含除法)。

N-2-26	能做量的簡單估測。
<b>幾何</b>	
S-2-01	能認識平面圖形的內部、外部及其周界與周長。
S-2-02	能透過操作，將簡單圖形切割重組成另一已知簡單圖形。
S-2-03	能理解垂直與平行的意義。
S-2-04	能透過平面圖形的組成要素，認識基本平面圖形。
S-2-05	能透過操作，認識簡單平面圖形的性質。
S-2-06	能認識平面圖形全等的意義。
S-2-07	能理解旋轉角的意義。
S-2-08	能理解正方形和長方形的面積與周長公式。(N-2-22)
<b>代數</b>	
A-2-01	能理解乘除互逆，並應用於驗算與解題。
A-2-02	能在具體情境中，理解乘法結合律，並運用於簡化計算。
A-2-03	能在四則混合計算中，運用數的運算性質。
<b>統計與機率</b>	
D-2-01	能報讀生活中常見的表格。
D-2-02	能認識並報讀生活中的長條圖、折線圖。

### (3)第三階段能力指標(國小五至六年級)

數與量	
N-3-01	能熟練整數乘、除的直式計算。
N-3-02	能熟練整數四則混合運算，並解決生活中的三步驟問題。
N-3-03	能理解因數、倍數、公因數與公倍數。
N-3-04	能認識質數、合數，並能用短除法做質因數分解。
N-3-05	能認識最大公因數、最小公倍數與兩數互質的意義，並用來將分數化成最簡分數。
N-3-06	能理解等值分數、約分、擴分的意義。
N-3-07	能理解通分的意義，並用來解決異分母分數的比較與加減問題。
N-3-08	能認識多位小數，並做比較、直式加減及整數倍的計算。
N-3-09	能理解分數(含小數)乘法的意義及計算方法，並解決生活中的問題。
N-3-10	能理解分數(含小數)除法的意義及計算方法，並解決生活中的問題。
N-3-11	能用直式處理小數的乘除計算(不含循環小數)。
N-3-12	能在具體情境中，對某數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除之估算。
N-3-13	能做分數與小數的互換，並標記在數線上。
N-3-14	能認識比率及其在生活中的應用。
N-3-15	能認識比、比值與正比的意義，並解決生活中的問題。
N-3-16	能認識導出單位並做簡單的應用。
N-3-17	能理解速度的概念與應用，認識速度的常用單位及換算，並處理相關的計算問題。
N-3-18	能由生活中常用的數量關係，運用於理解問題並解決問題。(A-3-02)
N-3-19	能認識量的常用單位及其換算，並用複名數處理相關的計算問題。
N-3-20	能理解正方體和長方體的體積公式。(S-3-05)
N-3-21	能理解容量、容積和體積間的關係。
N-3-22	能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(S-3-06)
N-3-23	能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形面積。(S-3-07)
N-3-24	能理解簡單直立柱體的體積為底面積與高的乘積。(S-3-10)
N-3-25	能計算正方體或長方體的表面積。(S-3-11)

<b>幾何</b>	
S-3-01	能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。
S-3-02	能透過操作，認識「三角形三內角和為 180 度」與「兩邊和大於第三邊」的性質。
S-3-03	能理解平面圖形的線對稱關係。
S-3-04	能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度與面積的影響，並認識比例尺。
S-3-05	能理解正方體和長方體的體積公式。(N-3-20)
S-3-06	能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(N-3-22)
S-3-07	能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形面積。(N-3-23)
S-3-08	能認識面的平行與垂直，線與面的垂直。
S-3-09	能認識球、直圓柱、直圓錐、直角柱與正角錐。
S-3-10	能理解簡單直立柱體的體積為底面積與高的乘積。(N-3-24)
S-3-11	能計算正方體或長方體的表面積。(N-3-25)
<b>代數</b>	
A-3-01	能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律與其他乘除混合計算之性質，並運用於簡化計算。
A-3-02	能由生活中常用的數量關係，運用於理解問題並解決問題。(N-3-18)
A-3-03	能認識等量公理。
A-3-04	能用含未知數符號的算式表徵具體情境之單步驟問題，並解釋算式與情境的關係。
A-3-05	能解決用未知數列式之單步驟問題。
A-3-06	能用符號表示簡單的常用公式。
<b>統計與機率</b>	
D-3-01	能整理生活中的資料，並製成長條圖、折線圖或圓形圖。

**(4)第四階段能力指標(國中一至三年級)**

<b>數與量</b>	
N-4-01	能理解質數、質因數分解、最大公因數、最小公倍數、互質的意義。
N-4-02	能熟練求質因數分解、最大公因數、最小公倍數的短除法，並解決生活中的問題。
N-4-03	能理解比例關係、連比、正比、反比的意義，並解決生活中的問題。
N-4-04	能熟練比例式的基本運算。
N-4-05	能認識負數、相反數、絕對值的意義。
N-4-06	能做正負數的比較與加、減、乘、除計算。
N-4-07	能將負數標記在數線上，理解正負數的比較與加、減運算在數線上的對應意義，並能計算數線上兩點的距離。
N-4-08	能熟練正負數的四則混合運算。
N-4-09	能認識指數的記號與指數律。
N-4-10	能認識科學記號。
N-4-11	能認識二次方根及其近似值。
N-4-12	能理解根式的四則運算。
N-4-13	能辨識數列的規則性。
N-4-14	能熟練等差數列與等差級數的樣式、記法與公式，並解決相關問題。
<b>幾何</b>	
S-4-01	能理解常用幾何形體之定義與性質。
S-4-02	能指出滿足給定幾何性質的形體。
S-4-03	能透過形體之刻畫性質，判斷不同形體之包含關係。
S-4-04	能利用形體的性質解決幾何問題。
S-4-05	能理解畢氏定理及其逆敘述，並用來解題。
S-4-06	能理解外角和定理與三角形、多邊形內角和定理的關係。
S-4-07	能理解平面上兩平行直線的各種幾何性質。
S-4-08	能理解線對稱圖形的幾何性質，並應用於解題和推理。
S-4-09	能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
S-4-10	能根據直尺、圓規操作過程的敘述，完成尺規作圖。
S-4-11	能理解一般三角形的幾何性質。
S-4-12	能理解特殊三角形(如正三角形、等腰三角形、直角三角形)的幾何性質。

S-4-13	能理解特殊四邊形(如正方形、矩形、平行四邊形、菱形、梯形)與正多邊形的幾何性質。
S-4-14	能理解圖形縮放前後不變的幾何性質。
S-4-15	能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。
S-4-16	能理解三角形內心、外心、重心的意義與性質。
S-4-17	能理解圓的幾何性質。
S-4-18	能用反例說明一敘述錯誤的原因，並能辨識一敘述及其逆敘述間的不同。(A-4-19)
S-4-19	能針對問題，利用幾何或代數性質做簡單證明。(A-4-20)
<b>代數</b>	
A-4-01	能用符號代表數，表示常用公式、運算規則以及常見的數量關係(例如：比例關係、函數關係)。
A-4-02	能理解數的四則運算律，並知道加與減、乘與除是同一種運算。
A-4-03	能用 $x$ 、 $y$ 、 $\dots$ 符號表徵問題情境中的未知量及變量，並將問題中的數量關係，寫成恰當的算式(等式或不等式)。
A-4-04	能理解生活中常用的數量關係(例如：比例關係、函數關係)，恰當運用於理解題意，並將問題列成算式。
A-4-05	能理解等量公理的意義，並做應用。
A-4-06	能理解解題的一般過程，知道解出方程式或不等式後，還要驗算其解的合理性。
A-4-07	能熟練一元一次方程式的解法，並用來解題。
A-4-08	能理解一元一次不等式解的意義，並用來解題。
A-4-09	能理解二元一次方程式的意義。
A-4-10	能理解直角坐標系，並能計算坐標平面上兩點間的距離。
A-4-11	能在坐標平面上，畫出一次函數或二元一次方程式的圖形。
A-4-12	能熟練二元一次聯立方程式的解法，並用來解題。
A-4-13	能熟練乘法公式。
A-4-14	能認識多項式，並熟練其四則運算。
A-4-15	能理解畢氏(勾股)定理，並做應用。
A-4-16	能用因式分解或配方法，解出二次方程式，並用來解題。
A-4-17	能利用配方法，計算二次函數的最大值或最小值。
A-4-18	能理解二次函數圖形的線對稱性，求出其線對稱軸以及最高點或最低點，並應用來畫出坐標平面上二次函數的圖形。

A-4-19	能用反例說明一敘述錯誤的原因。能辨識一個敘述及其逆敘述間的不同。(S-4-18)
A-4-20	能針對問題，利用幾何或代數性質做簡單證明。(S-4-19)
<b>統計與機率</b>	
D-4-01	能利用統計量，例如：平均數、中位數及眾數等，來認識資料集中的位置。
D-4-02	能利用統計量，例如：全距、四分位距等，來認識資料分散的情形。
D-4-03	能以中位數、四分位數、百分位數，來認識資料在群體中的相對位置。
D-4-04	能在具體情境中認識機率的觀念。

### 3.分年細目

本綱要的能力指標是依主題與階段的學習能力而訂定，然因多數指標須採分年教學，方能達成其教學目標。因此，由階段能力指標演繹出更細緻的分年細目及詮釋，方能明確掌握分年教學的目標。

能力指標、分年細目與分年細目詮釋之內容，應為教師教學及教科書編輯的主要參考依據。此外，教師教學及教科書編輯亦可依詮釋內容為基礎，在深度與廣度上做適度的延伸。

分年細目與能力指標相同，亦採三碼編排，第一碼表示年級，分別以 1、...、9 表示一至九年級；第二碼表示主題，分別以小寫字母 n、s、a、d 表示「數與量」、「幾何」、「代數」和「統計與機率」四個主題；第三碼則是分年細目的流水號，表示該細項下分年細目的序號。

#### 第一階段(國小一至二年級)

##### 一年級分年細目

數與量		
分年細目		對照指標
1-n-01	能認識 100 以內的數及「個位」、「十位」的位名，並進行位值單位的換算。	N-1-01
1-n-02	能認識 1 元、5 元、10 元等錢幣幣值，並做 1 元與 10 元錢幣的換算。	N-1-01
1-n-03	能運用數表達多少、大小、順序。	N-1-01
1-n-04	能從合成、分解的活動中，理解加減法的意義，使用 +、-、= 做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題。	N-1-02 A-1-01
1-n-05	能熟練基本加減法。	N-1-02
1-n-06	能做一位數之連加、連減與加減混合計算。	N-1-02
1-n-07	能進行 2 個一數、5 個一數、10 個一數等活動。	N-1-01 N-1-04
1-n-08	能認識常用時間用語，並報讀日期與鐘面上整點、半點的時刻。	N-1-11
1-n-09	能認識長度，並做直接比較。	N-1-08 S-1-01 S-1-03
1-n-10	能利用間接比較或以個別單位實測的方法比較物體的長短。	N-1-08
幾何		
分年細目		對照指標
1-s-01	能認識直線與曲線。	S-1-01
1-s-02	能辨認、描述與分類簡單平面圖形與立體形體。	S-1-01
1-s-03	能描繪或仿製簡單平面圖形。	S-1-02

1-s-04	能依給定圖示，將簡單形體做平面鋪設與立體堆疊。	S-1-02
<b>代數</b>		
分年細目		對照指標
1-a-01	能在具體情境中，認識加法的交換律。	A-1-02
1-a-02	能在具體情境中，認識加減互逆。	A-1-03
<b>統計與機率</b>		
分年細目		對照指標
1-d-01	能對生活中的事件或活動做初步的分類與記錄。	D-1-01
1-d-02	能將紀錄以統計表呈現並說明。	D-1-01

## 二年級分年細目

數與量		
分年細目		對照指標
2-n-01	能認識 1000 以內的數及「百位」的位名，並進行位值單位換算。	N-1-01
2-n-02	能認識 100 元的幣值，並做 10 元與 100 元錢幣的換算。	N-1-01
2-n-03	能用 $<$ 、 $=$ 與 $>$ 表示數量大小關係，並在具體情境中認識遞移律。(同 2-a-01)	N-1-01 A-1-01
2-n-04	能熟練二位數加減直式計算。	N-1-02 N-1-03
2-n-05	能理解三位數加減直式計算(不含兩次退位)。	N-1-02 N-1-03
2-n-06	能理解乘法的意義，使用 $\times$ 、 $=$ 做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題。	N-1-04 A-1-01
2-n-07	能在具體情境中，進行分裝與平分的活動。	N-1-05 N-1-06
2-n-08	能理解九九乘法。	N-1-06 A-1-02
2-n-09	能在具體情境中，解決兩步驟問題(加與減，不含併式)。	N-1-07
2-n-10	能在具體情境中，解決兩步驟問題(加、減與乘，不含併式)。	N-1-07
2-n-11	能做簡單的二位數加減估算。	N-1-02
2-n-12	能認識鐘面上的時刻是幾點幾分。	N-1-11
2-n-13	能認識「年」、「月」、「星期」、「日」，並知道「某月有幾日」、「一星期有七天」。	N-1-11
2-n-14	能理解用不同個別單位測量同一長度時，其數值不同，並能說明原因。	N-1-08
2-n-15	能認識長度單位「公分」、「公尺」及其關係，並能做相關的實測、估測與同單位的計算。	N-1-08 N-1-09
2-n-16	能認識容量。	N-1-10
2-n-17	能認識重量。	N-1-10
2-n-18	能認識面積。(同 2-s-04)	N-1-10 S-1-03
幾何		
分年細目		對照指標
2-s-01	能認識周遭物體上的角、直線與平面(含簡單立體形體)。	S-1-03

2-s-02	能認識生活周遭中平行與垂直的現象。	S-1-04
2-s-03	能使用直尺處理與線段有關的問題。	N-1-08 S-1-02
2-s-04	能認識面積。(同 2-n-18)	N-1-10 S-1-03
2-s-05	認識簡單平面圖形的邊長關係。	N-1-08 S-1-01 S-1-03
<b>代數</b>		
分年細目		對照指標
2-a-01	能用 $<$ 、 $=$ 與 $>$ 表示數量大小關係，並在具體情境中認識遞移律。(同 2-n-03)	N-1-01 A-1-01
2-a-02	能在具體情境中，認識加法順序改變並不影響其和的性質。	A-1-02
2-a-03	能在具體情境中，認識乘法交換律。	A-1-02
2-a-04	能理解加減互逆，並運用於驗算與解題。	A-1-03

第二階段(國小三至四年級)

三年級分年細目

數與量		
分年細目		對照指標
3-n-01	能認識 10000 以內的數及「千位」的位名，並進行位值單位換算。	N-2-01
3-n-02	能熟練加減直式計算(四位數以內，和 < 10000，含多重退位)。	N-2-03
3-n-03	能用併式記錄加減兩步驟的問題。	N-2-06 N-2-07
3-n-04	能熟練三位數乘以一位數的直式計算。	N-2-05
3-n-05	能理解除法的意義，運用 $\div$ 、 $=$ 做橫式紀錄(包括有餘數的情況)，並解決生活中的問題。	N-2-04
3-n-06	能熟練三位數除以一位數的直式計算。	N-2-05
3-n-07	能在具體情境中，解決兩步驟問題(加、減與除，不含併式)。	N-2-06
3-n-08	能在具體情境中，解決兩步驟問題(連乘，不含併式)。	N-2-06
3-n-09	能由長度測量的經驗來認識數線，標記整數值與一位小數，並在數線上做大小比較、加、減的操作。	N-2-14 N-2-15
3-n-10	能做簡單的三位數加減估算。	N-2-03
3-n-11	能在具體情境中，初步認識分數，並解決同分母分數的比較與加減問題。	N-2-09 N-2-10
3-n-12	能認識一位小數，並做比較與加減計算。	N-2-13
3-n-13	能認識時間單位「日」、「時」、「分」、「秒」及其間的關係，並做同單位時間量及時、分複名數的加減計算(不進、退位)。	N-2-24
3-n-14	能認識長度單位「毫米」及「公尺」、「公分」、「毫米」間的關係，並做相關的實測、估測與計算。	N-2-17 N-2-26
3-n-15	能認識容量單位「公升」、「毫公升」(簡稱「毫升」)及其關係，並做相關的實測、估測與計算。	N-2-18 N-2-26
3-n-16	能認識重量單位「公斤」、「公克」及其關係，並做相關的實測、估測與計算。	N-2-19 N-2-26
3-n-17	能認識角，並比較角的大小。(同 3-s-04)	N-2-20 S-2-04
3-n-18	能認識面積單位「平方公分」，並做相關的實測與計算。(同 3-s-05)	N-2-21 S-2-02

幾何		
分年細目		對照指標
3-s-01	能認識平面圖形的內部、外部與其周界。	S-2-01
3-s-02	能認識周長，並實測周長。	N-2-17 S-2-01
3-s-03	能使用圓規畫圓，認識圓的「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。	S-2-04 S-2-05
3-s-04	能認識角，並比較角的大小。(同 3-n-17)	N-2-20 S-2-04
3-s-05	能認識面積單位「平方公分」，並做相關的實測與計算。(同 3-n-18)	N-2-21 S-2-02
3-s-06	能透過操作，將簡單圖形切割重組成另一已知簡單圖形。	S-2-02
3-s-07	能由邊長和角的特性來認識正方形和長方形。	S-2-04
代數		
分年細目		對照指標
3-a-01	能理解乘除互逆，並運用於驗算及解題。	A-2-01
統計與機率		
分年細目		對照指標
3-d-01	能報讀生活中常見的表格。	D-2-01

#### 四年級分年細目

數與量		
分年細目		對照指標
4-n-01	能透過位值概念，延伸整數的認識到大數(含「億」、「兆」之位名)，並做位值單位的換算。	N-2-02
4-n-02	能熟練整數加、減的直式計算。	N-2-03
4-n-03	能熟練較大位數的乘除直式計算。	N-2-05
4-n-04	能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。	N-2-06 N-2-07 A-2-02
4-n-05	能做整數四則混合計算(兩步驟)。	N-2-07 A-2-03
4-n-06	能在具體情境中，對大數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減之估算。	N-2-08
4-n-07	能理解分數之「整數相除」的意涵。	N-2-11
4-n-08	能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。	N-2-10
4-n-09	能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。	N-2-12 N-2-16
4-n-10	能將簡單分數標記在數線上。	N-2-16
4-n-11	能認識二位小數與百分位的位名，並做比較。	N-2-13
4-n-12	能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。	N-2-13
4-n-13	能解決複名數的時間量的計算問題。	N-2-24 N-2-25
4-n-14	能以複名數解決量(長度、容量、重量)的計算問題。	N-2-17 N-2-18 N-2-19 N-2-25
4-n-15	能認識長度單位「公里」，及「公里」與其他長度單位的關係，並做相關計算。	N-2-17
4-n-16	能認識角度單位「度」，並使用量角器實測角度或畫出指定的角。(同 4-s-04)	N-2-20
4-n-17	能認識面積單位「平方公尺」，及「平方公分」、「平方公尺」間的關係，並做相關計算。	N-2-21

4-n-18	能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。 (同 4-s-09)	N-2-22 S-2-08
4-n-19	能認識體積及體積單位「立方公分」。	N-2-23
<b>幾何</b>		
分年細目		對照指標
4-s-01	能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形。	S-2-04
4-s-02	能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。	S-2-05
4-s-03	能認識平面圖形全等的意義。	S-2-06
4-s-04	能認識「度」的角度單位，使用量角器實測角度或畫出指定的角。(同 4-n-16)	N-2-20
4-s-05	能理解旋轉角(包括平角和周角)的意義。	S-2-07
4-s-06	能理解平面上直角、垂直與平行的意義。	N-2-20 S-2-03
4-s-07	能認識平行四邊形和梯形。	S-2-02 S-2-03 S-2-04
4-s-08	能利用三角板畫出直角與兩平行線段，並用來描繪平面圖形。	S-2-03 S-2-04
4-s-09	能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。 (同 4-n-18)	N-2-22 S-2-08
<b>代數</b>		
分年細目		對照指標
4-a-01	能在具體情境中，理解乘法結合律。	A-2-02
4-a-02	能在四則混合計算中，運用數的運算性質。	N-2-07 A-2-01
<b>統計與機率</b>		
分年細目		對照指標
4-d-01	能報讀生活中常用的長條圖。	D-2-02
4-d-02	能報讀生活中常用的折線圖。	D-2-02

### 第三階段(國小五至六年級)

#### 五年級分年細目

數與量		
分年細目		對照指標
5-n-01	能熟練整數乘、除的直式計算。	N-3-01
5-n-02	能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。	N-3-02 A-3-01
5-n-03	能熟練整數四則混合計算。	N-3-02 A-3-01
5-n-04	能理解因數和倍數。	N-3-03
5-n-05	能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。	N-3-03
5-n-06	能用約分、擴分處理等值分數的換算。	N-3-06
5-n-07	能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。	N-3-07
5-n-08	能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。	N-3-09
5-n-09	能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。	N-3-10
5-n-10	能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。	N-3-08
5-n-11	能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。	N-3-09 N-3-11
5-n-12	能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。	N-3-11 N-3-13
5-n-13	能將分數、小數標記在數線上。	N-3-11 N-3-13
5-n-14	能認識比率及其在生活中的應用(含「百分率」、「折」)。	N-3-14
5-n-15	能解決時間的乘除計算問題。	N-3-19
5-n-16	能認識重量單位「公噸」、「公噸」及「公斤」間的關係，並做相關計算。	N-3-19
5-n-17	能認識面積單位「公畝」、「公頃」、「平方公里」及其關係，並做相關計算。	N-3-19
5-n-18	能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(同 5-s-05)	N-3-22 S-3-06
5-n-19	能認識體積單位「立方公尺」、「立方公分」及「立方公尺」間的關係，並做相關計算。	N-3-19

5-n-20	能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。(同 5-s-07)	N-3-20 N-3-25 S-3-05 S-3-11
5-n-21	能理解容量、容積和體積間的關係。	N-3-21
<b>幾何</b>		
分年細目		對照指標
5-s-01	能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。	S-3-02
5-s-02	能透過操作，理解三角形任意兩邊和大於第三邊。	S-3-02
5-s-03	能認識圓心角，並認識扇形。	S-3-01
5-s-04	能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。	S-3-03
5-s-05	能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(同 5-n-18)	N-3-22 S-3-06
5-s-06	能認識球、直圓柱、直圓錐、直角柱與正角錐。	S-3-09
5-s-07	能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。(同 5-n-20)	N-3-20 N-3-25 S-3-05 S-3-11
<b>代數</b>		
分年細目		對照指標
5-a-01	能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。	N-3-02 A-3-01
5-a-02	能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除以此兩數之積。	A-3-01
5-a-03	能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。	N-3-02 A-3-01
5-a-04	能將整數單步驟的具體情境問題列成含有未知數符號的算式，並能解釋算式、求解及驗算。	A-3-04 A-3-05

## 六年級分年細目

數與量		
分年細目		對照指標
6-n-01	能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解(質數 $<20$ ，質因數 $<20$ ，被分解數 $<100$ )。	N-3-04
6-n-02	能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。	N-3-05
6-n-03	能認識兩數互質的意義，並將分數約成最簡分數。	N-3-05
6-n-04	能理解分數除法的意義及熟練其計算，並解決生活中的問題。	N-3-10
6-n-05	能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。	N-3-02 A-3-01
6-n-06	能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。	N-3-10 N-3-11
6-n-07	能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除之估算。	N-3-12
6-n-08	能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。	N-3-02 A-3-01
6-n-09	能認識比和比值，並解決生活中的問題。	N-3-15
6-n-10	能理解正比的意義，並解決生活中的問題。	N-3-15
6-n-11	能理解常用導出量單位的記法，並解決生活中的問題。	N-3-16
6-n-12	能認識速度的意義及其常用單位。	N-3-16 N-3-17
6-n-13	能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。(同 6-a-04)	N-3-18 A-3-02 A-3-03 A-3-04 A-3-05
6-n-14	能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。。(同 6-s-03)	N-3-23 S-3-07
6-n-15	能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。(同 6-s-05)	N-3-24 S-3-10

幾何		
分年細目		對照指標
6-s-01	能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。	S-3-01
6-s-02	能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。	S-3-04
6-s-03	能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。(同 6-n-14)	N-3-23 S-3-07
6-s-04	能認識面與面的平行與垂直，線與面的垂直，並描述正方體與長方體中面與面、線與面的關係。	S-3-08
6-s-05	能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。(同 6-n-15)	N-3-24 S-3-10
代數		
分年細目		對照指標
6-a-01	能理解等量公理。	A-3-03
6-a-02	能將分數單步驟的具體情境問題列成含有未知數符號的算式，並求解及驗算。	A-3-04 A-3-05
6-a-03	能用符號表示常用的公式。	A-3-06
6-a-04	能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。(同 6-n-13)	N-3-18 A-3-02 A-3-03 A-3-04 A-3-05
統計與機率		
分年細目		對照指標
6-d-01	能整理生活中的資料，並製成長條圖。	D-3-01
6-d-02	能整理生活中的有序資料，並繪製成折線圖。	D-3-01
6-d-03	能報讀生活中常用的圓形圖，並能整理生活中的資料，製成圓形圖。	D-3-01

第四階段（國中一至三年級）

七年級分年細目

數與量		
分年細目		對照指標
7-n-01	能理解質數的意義，並認識 100 以內的質數。	N-4-01
7-n-02	能理解因數、質因數、倍數、公因數、公倍數及互質的概念，並熟練質因數分解的計算方法。	N-4-01 N-4-02 N-4-09
7-n-03	能以最大公因數、最小公倍數熟練約分、擴分、最簡分數及分數加減的計算。	N-4-02
7-n-04	能認識負數，並能以「正、負」表徵生活中性質相反的量。	N-4-05
7-n-05	能認識絕對值，並能利用絕對值比較負數的大小。	N-4-05
7-n-06	能理解負數的特性並熟練數(含小數、分數)的四則混合運算。	N-4-05 N-4-06 N-4-08
7-n-07	能熟練數的運算規則。	N-4-08 A-4-02
7-n-08	能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。	N-4-07
7-n-09	能以不等式標示數的範圍或數線上任一線段的範圍。	N-4-07 A-4-08
7-n-10	能理解指數為非負整數的次方，並能運用到算式中。	N-4-09
7-n-11	能理解同底數的相乘或相除的指數律。	N-4-09
7-n-12	能用科學記號表示法表達很大的數或很小的數。	N-4-10
7-n-13	能理解比、比例式、正比、反比的意義，並能解決生活中有關比例的問題。	N-4-03
7-n-14	能熟練比例式的基本運算。	N-4-04
7-n-15	能理解連比、連比例式的意義，並能解決生活中有關連比例的問題。	N-4-03 N-4-04

代數		
分年細目		對照指標
7-a-01	能熟練符號的意義，及其代數運算。	A-4-01 A-4-02
7-a-02	能用符號算式記錄生活情境中的數學問題。	A-4-03 A-4-04
7-a-03	能理解一元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出一元一次方程式。	A-4-03 A-4-06 A-4-07
7-a-04	能以等量公理解一元一次方程式，並做驗算。	A-4-05 A-4-07
7-a-05	能利用移項法則來解一元一次方程式，並做驗算。	A-4-07
7-a-06	能理解二元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出二元一次方程式。	A-4-03 A-4-09
7-a-07	能理解二元一次聯立方程式，及其解的意義，並能由具體情境中列出二元一次聯立方程式。	A-4-03 A-4-12
7-a-08	能熟練使用代入消去法與加減消去法解二元一次方程式的解。	A-4-12
7-a-09	能認識函數。	A-4-01 A-4-04
7-a-10	能認識常數函數及一次函數。	A-4-01 A-4-04
7-a-11	能理解平面直角坐標系。	A-4-10
7-a-12	能在直角坐標平面上描繪常數函數及一次函數的圖形。	A-4-11
7-a-13	能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形。	A-4-11
7-a-14	能理解二元一次聯立方程式解的幾何意義。	A-4-11 A-4-12
7-a-15	能理解不等式的意義。	A-4-08
7-a-16	能由具體情境中列出簡單的一元一次不等式。	A-4-03 A-4-08
7-a-17	能解出一元一次不等式，並在數線上標示相關的線段。	A-4-08
7-a-18	能說明 $a \leq x \leq b$ 時 $y=cx+d$ 的範圍，並在數線上圖示。	A-4-11

## 八年級分年細目

數與量		
分年細目		對照指標
8-n-01	能理解二次方根的意義及熟練二次方根的計算。	N-4-11 N-4-12
8-n-02	能求二次方根的近似值。	N-4-11
8-n-03	能理解根式的化簡及四則運算。	N-4-12
8-n-04	能在日常生活中，觀察有次序的數列，並理解其規則性。	N-4-13
8-n-05	能觀察出等差數列的規則性，並能利用首項、公差計算出等差數列的一般項。	N-4-13 N-4-14
8-n-06	能理解等差級數求和的公式，並能解決生活中相關的問題。	N-4-13 N-4-14
幾何		
分年細目		對照指標
8-s-01	能認識一些簡單圖形及其常用符號，如點、線、線段、射線、角、三角形的符號。	S-4-01
8-s-02	能理解角的基本性質。	S-4-01 S-4-04
8-s-03	能理解凸多邊形內角和以及外角和公式。	S-4-06
8-s-04	能認識垂直以及相關的概念。	S-4-01 S-4-04
8-s-05	能理解平行的意義，平行線截線性質，以及平行線判別性質。	S-4-01 S-4-07
8-s-06	能理解線對稱的意義，以及能應用到理解平面圖形的幾何性質。	S-4-08
8-s-07	能理解三角形全等性質。	S-4-09
8-s-08	能理解畢氏定理(Pythagorean Theorem)及其應用。 (同 8-a-05)	S-4-05 A-4-15
8-s-09	能熟練直角坐標上任兩點的距離公式。	S-4-05 A-4-10
8-s-10	能理解三角形的基本性質。	S-4-08 S-4-09 S-4-11 S-4-12
8-s-11	能認識尺規作圖並能做基本的尺規作圖。	S-4-10

8-s-12	能理解特殊的三角形與特殊的四邊形的性質。	S-4-02 S-4-03 S-4-04 S-4-08 S-4-12 S-4-13
8-s-13	能理解平行四邊形及其性質。	S-4-02 S-4-04 S-4-07 S-4-13
8-s-14	能用線對稱概念，理解等腰三角形、正方形、菱形、箏形等平面圖形。	S-4-08 S-4-12 S-4-13
8-s-15	能理解梯形及其性質。	S-4-13
8-s-16	能舉例說明，有一些敘述成立時，其逆敘述也會成立；但是，也有一些敘述成立時，其逆敘述卻不成立。	S-4-18
8-s-17	能針對幾何推理中的步驟，寫出所依據的幾何性質。	S-4-19
8-s-18	能從幾何圖形的判別性質，判斷圖形的包含關係。	S-4-03 S-4-04
8-s-19	能熟練計算簡單圖形及其複合圖形的面積。	S-4-04
8-s-20	能理解與圓相關的概念(如半徑、弦、弧、弓形等)的意義。	S-4-17
8-s-21	能理解弧長的公式以及扇形面積的公式。	S-4-17
<b>代數</b>		
分年細目		對照指標
8-a-01	能熟練二次式的乘法公式。	A-4-13
8-a-02	能理解簡單根式的化簡及有理化。	N-4-12
8-a-03	能認識多項式及相關名詞。	A-4-14
8-a-04	能熟練多項式的加、減、乘、除四則運算。	A-4-14
8-a-05	能理解畢氏定理 (Pythagorean Theorem) 及其應用。 (同 8-s-08)	S-4-05 A-4-15
8-a-06	能理解二次多項式因式分解的意義。	A-4-16
8-a-07	能利用提公因式法分解二次多項式。	A-4-16
8-a-08	能利用乘法公式與十字交乘法做因式分解。	A-4-16

8-a-09	能在具體情境中認識一元二次方程式，並理解其解的意義。	A-4-06 A-4-16
8-a-10	能利用因式分解來解一元二次方程式。	A-4-16
8-a-11	能利用配方法解一元二次方程式。	A-4-16
8-a-12	能利用一元二次方程式解應用問題。	A-4-16

## 九年級分年細目

幾何		
分年細目		對照指標
9-s-01	能理解平面圖形縮放的意義。	S-4-14
9-s-02	能理解多邊形相似的意義。	S-4-15
9-s-03	能理解三角形的相似性質。	S-4-15
9-s-04	能理解平行線截比例線段性質及其逆敘述。	S-4-07
9-s-05	能利用相似三角形對應邊成比例的觀念，解應用問題。	S-4-15
9-s-06	能理解圓的幾何性質。	S-4-17
9-s-07	能理解直線與圓及兩圓的關係。	S-4-17
9-s-08	能理解多邊形外心的意義和相關性質。	S-4-16 S-4-17
9-s-09	能理解多邊形內心的意義和相關性質。	S-4-16 S-4-17
9-s-10	能理解三角形重心的意義和相關性質。	S-4-16
9-s-11	能理解正多邊形的幾何性質(含線對稱、內切圓、外接圓)。	S-4-08 S-4-13 S-4-17
9-s-12	能認識證明的意義。	S-4-19 A-4-20
9-s-13	能認識線與平面、平面與平面的垂直關係與平行關係。	S-4-01
9-s-14	能理解簡單立體圖形。	S-4-01 S-4-02
9-s-15	能理解簡單立體圖形的展開圖，並能利用展開圖來計算立體圖形的表面積或側面積。	S-4-01 S-4-04
9-s-16	能計算直角柱、直圓柱的體積。	S-4-01 S-4-04

代數		
分年細目		對照指標
9-a-01	能理解二次函數的意義。	A-4-04
9-a-02	能描繪二次函數的圖形。	A-4-18
9-a-03	能計算二次函數的最大值或最小值。	A-4-17
9-a-04	能解決二次函數的相關應用問題。	A-4-17 A-4-18
統計與機率		
分年細目		對照指標
9-d-01	能將原始資料整理成次數分配表，並製作統計圖形，來顯示資料蘊含的意義。	D-4-01 D-4-02 D-4-03
9-d-02	認識平均數、中位數與眾數。	D-4-01 D-4-03
9-d-03	能認識全距及四分位距，並製作盒狀圖。	D-4-02 D-4-03
9-d-04	能認識百分位數的概念，並認識第 10、25、50、75、90 百分位數。	D-4-03
9-d-05	能在具體情境中認識機率的觀念。	D-4-04

#### (四)能力指標與十大基本能力的關係

基本能力	能力指標
1.瞭解自我與發展潛能	<ul style="list-style-type: none"> <li>•瞭解自己在數量或形上的能力及思考型態的傾向。</li> <li>•挑戰並增加自我的數學能力。</li> </ul>
2.欣賞、表現與創新	<ul style="list-style-type: none"> <li>•以數學眼光欣賞各學習領域中的規律。</li> <li>•領會數學本身的美。</li> <li>•以數學有組織、有效地表現想法。</li> </ul>
3.生涯規劃與終身學習	<ul style="list-style-type: none"> <li>•具有終身學習所需的數學基本知識。</li> <li>•養成凡事都能嘗試用數學的觀點或方法來切入的習慣。</li> </ul>
4.表達、溝通與分享	<ul style="list-style-type: none"> <li>•結合一般語言與數學語言說明情境及問題。</li> <li>•從數學的觀點推測及說明解答的屬性及其合理性。</li> <li>•與他人分享思考歷程與成果。</li> </ul>
5.尊重、關懷與團隊合作	<ul style="list-style-type: none"> <li>•互相幫助解決問題。</li> <li>•尊重同儕解決數學問題的多元想法。</li> <li>•關懷同儕的數學學習。</li> </ul>
6.文化學習與國際瞭解	<ul style="list-style-type: none"> <li>•連結數學發展與人類文化活動間的互動。</li> <li>•與其他學習領域(語文、社會、自然與生活科技、藝術與人文、健康與體育、綜合活動)連結。</li> </ul>
7.規劃、組織與實踐	<ul style="list-style-type: none"> <li>•組織數學材料。</li> <li>•以數學觀念組織材料。</li> <li>•以數學語言與數學思維做系統規劃。</li> </ul>
8.運用科技與資訊	<ul style="list-style-type: none"> <li>•將各學習領域與數學相關的資料資訊化。</li> </ul>
9.主動探索與研究	<ul style="list-style-type: none"> <li>•形成問題、蒐集、觀察、實驗、分類、歸納、類比、分析、轉化、臆測、推論、推理、監控、確認、反駁、特殊化、一般化。</li> </ul>
10.獨立思考與解決問題	<ul style="list-style-type: none"> <li>•進行數學式思維。</li> <li>•以數、形、量的概念與方法探討並解決問題。</li> </ul>

## (五)實施要點

本實施要點包括「教學」、「評量」、「教科書」與「電腦與電算器」四部分。

### 1.教學

- (1)課程綱要能力指標的訂定，以該階段或分年結束時，學生應具備的數學能力為考量。教師應依據能力指標及其詮釋，規劃課程、教案或依照教科書進行教學。教材選取應配合地方生活環境和學生實際生活，選擇適當而有趣的題材，並布置適當的學習環境，以利於教學。
- (2)能力指標與分年細目是離散的條目，但教學與學習是連續的過程。階段或分年的規定，強調的是在該階段或分年中，應以條目內容為重點，發展並完成。但是基於學習的需求，教師仍然可以依自己的經驗，先做部分的跨階段或跨年的前置處理，或做後續的補強教學。
- (3)教師教學應以學生為主體，以學生的數學能力發展為考量。數學學習節奏之疏熟快慢，經常因人而異。教師應避免將全班學生，當做均質的整體，並應透過教學的評量，分析學生的學習問題，做適當的診斷、導引與解決。
- (4)課程綱要的制定，並未預設特定的教學法，反而希望教師能依學生的年齡、前置經驗、授課主題特性與教學現場的狀況，因時制宜，採用教師本身覺得恰當或擅於處理的教學法，順暢地進行教學。
- (5)教學活動的設計應注重不同階段的學習型態，並與教學目標配合。
- (6)數學教學應注重數、量、形的聯繫，讓學生在實作、實測與直覺中，獲得數、量、形及其相互關係的概念，並逐步抽象化與程序化成為精鍊有效的數學語言，再經由反思、論證、練習與解題，讓學生逐步穩定掌握其概念，作為進一步學習的基礎。
- (7)教學過程可透過引導、啟發或教導，使學生能在具體的問題情境中，順利以所學的數學知識為基礎，形成解決問題所需的新數學概念，並有策略地選擇正確又有效率的解題程序。教師可提供有啟發性的問題、關鍵性的問題、現實生活的應用問題，激發學生不同的想法。但應避免空洞的或無意義的開放式問題，也避免預設或過早提出解題方式和結果。
- (8)教師應協助學生體驗生活情境與數學的連結過程，培養學生能以數學的觀點考察周遭事物的習慣，並培養學生觀察問題中的數學意涵、特性與關係，養成以數學的方式，將問題表徵為數學問題再加以解決的習慣，以提高應用數學知識的能力。同時在發展解題策略的過程中，加深對數學概念之理解。
- (9)當學生學習數學時，在生活應用解題與抽象形式能力兩課題間，必須來回往復地相互加強，才能真正順利地發展數學能力，不必過度執著於生活情境，干擾甚至忽略學生抽象形式能力的發展；也不應一味強調抽象程序的學習，妨礙學生將數學應用於日常生活解題的能力。

- (10)數學與其他學科的差異，在於其結構層層累積，而其發展既依賴直覺又需要推理。因此教師不宜負面地將學生的錯誤皆視為犯錯，而應考察學生發生問題的根源(語言未溝通、肆意擴張約定、推理的謬誤等)，並針對問題協助學生。因此教學時，宜提供充足的時間，鼓勵學生說明其理由與想法，肯定其正確的巧思，或用關鍵的例子，釐清其錯誤。
- (11)要學好數學，仰賴學生在各課題的學習，最後都能收斂連結為對數學的整體感或直覺，以作為下一個課題學習的基礎。整體感的自信，相當依賴於學生對於相關程序(計算方式、解題方式等)的熟練，而這種熟練，則需要教師能給予學生有啟發性的練習，讓學生從各種練習中，沈澱自己新學的概念，並能夠與原先的數學知識相連結。
- (12)教師應對學生強調驗算的重要性。這能讓學生理解各運算之內在關係，發展對問題解答之不同檢查策略，進而理解問題中各數學表徵的關係。在驗算有問題時，透過懷疑、檢查、判斷的過程，更能強化學生對數學確定性與內在連結的認識。驗算習慣的養成，也能讓學生更專心與自信。
- (13)為了貫徹將每一位學生帶上來的目標，教師在教學時，應儘量以全體學生學好數學為目標，依據對學生的評量，因材施教。針對未能達成階段性目標(例如：小四整數加、減、乘、除直式計算，小五整數四則混合運算或小六分數四則運算)，有待加強的學生，主管教育行政機關更應專款補助學校，做補強措施。

## 2.評量

- (1)評量是檢驗教學效果的過程，教師應透過各種評量方式，來改善自己的教學。評量有多種方式，譬如紙筆測驗、實測、討論、口頭回答、視察、作業、專題研究或分組報告等。教師宜視教學現場的需要，選擇適切的評量方式。
- (2)教學評量宜同時關照到學習成就與學習歷程，分析學生是否能達到能力指標的要求。教師應以教材內容、教學目標與相關課程能力指標，訂定評量的標準。教師不宜在教學評量中，出現困難度高的問題，因為教學評量並非常模參照類的考試，不該強調全班、全校的鑑別。細目詮釋中所附之評量範例，可作為教師命題難度的參考。
- (3)針對學童個人的評量結果，教師可以理解學生既有的知識與經驗，也可從學生發生的錯誤，回溯其學習上的問題並加以輔導修正。針對全班評量結果的共通錯誤，可能反映教師本身教學上的疏失，並可據以改進。全校評量或全國檢測之結果，則可能反映課程綱要的問題，教師可多做回饋，作為未來數學教育綱要修訂的參考。
- (4)評量時，應注意評量時機的選擇，避免對評量結果做錯誤或不適當解讀。評量學生的起點行為，可作為擬定教學計畫之依據；評量學生的學習狀況，可以及時發現學習困難，進行日常補救教學；評量學生最後學習所得，可作為學生學習回饋及輔導學生的參考。

(5)評量時，應配合評量的目的，讓問題能恰當反映學生的學習狀態，並讓所有的評量題型，發揮該題型的特長。除了單一選擇題與填充題以外的其他題型，均宜訂定分段給分標準，依其作答過程的適切性，給予部分分數，並讓學生理解其錯誤的原因。

### 3.教科書

(1)教科書的編寫，應配合課程綱要之基本理念、課程目標與能力指標，以協助教師教學、家長輔導與學生(較高年級)自學為目標。

(2)教科書的編寫，應注意整體結構的有機結合，在題材的呈現上，反映出各數學概念的內在連結。並且也應注意在取材上，能與其他數學主題、日常生活或其他學習領域的應用，做自然的連結。

(3)教科書的編寫，應注意文字的使用，配合學生的閱讀年齡。

(4)教科書的編寫，宜在題材及情境上兼顧本土與國際性。

### 4.電腦與電算器

在當前的資訊社會裡，電腦與電算器已被廣泛使用於生活中。面對大量資料，如何處理並獲取有用的資訊，已成為現代生活中的重要能力。教師應引導學生正面有效地使用電腦與電算器，來完成五大主題的學習。

基於以上的觀點，提出下列看法：

(1)在學生學會基本四則運算與估算後，學生面對問題時，應逐漸養成從問題研判適當計算精確度的能力。當此能力成熟，就可慢慢引入計算的輔助工具，協助解題。至於牽涉到科學記數與誤差的計算器使用，則以國中階段實施為宜。

(2)學生應明白，電算器或電腦固然可以用來減低計算上的負擔，但是仍然有各種錯誤的可能，因此仍然要有好的計算、估算甚至檢查策略，來驗證計算結果的合理性。

(3)學生在解決問題時，可以將其中大量重複、耗時又無意義的計算技術性處理，交給電腦來執行。

## (六) 附錄

### 附錄一分年細目詮釋

分年細目詮釋使用說明：

1. 細目詮釋的使用者是教師、教科書編者與審定者，因此內容在溝通表達上，涉及許多數學與數學教育的專有名詞，這些名詞不宜出現在教科書上。詮釋中對於不宜出現在課本或教學中的名詞均有加註。如 1-a-01 中的「交換律」一詞就不宜出現在四年級(包括四年級)以前的課本與教學中。
2. 必須出現在教科書中的標準用詞請參見本綱要附錄四。
3. 詮釋中的範例，目的在釐清細目的意義。教師課程設計或教科書編撰，應遵循分年細目及其詮釋的內容，但不需要完全遵照細目的順序。細目及其詮釋所規範的內容是至少要包括在教學與教科書中的題材。
4. 「檢查細目」可以併入其他主題的教學，不一定要另立單元(或章節)。
5. 部分概念如：驗算、估算及各種基本運算的性質等，在某條細目引入後，就應該貫穿往後的課程。我們希望學童在較小數字的自然情境，就能開始學習驗算，養成換一種方式或觀點算算看的習慣。基本運算的性質，如：交換律、結合律、遞移律等名詞，不必在課本出現，但應該從具體情境的範例及練習中，讓學童自然地認識這些性質，並在往後的學習中，不斷地加強及熟悉。
6. 詮釋中有些討論活動或概念的初次引進，目的都只是在提供學童經驗，鋪陳往後的學習，因此並不適合做評量，這些都會在詮釋中，特別以「※不宜評量」標明。

## 1.一年級細目詮釋

### 數與量

1-n-01 能認識 100 以內的數及「個位」、「十位」的位名，並進行位值單位的換算。	N-1-01
--	--------

- 說明：
- 非負整數的認識是學童最早接觸的數學教材，教學時宜讓兒童能初步掌握整數數詞序列的規律，並能以具體的量、聲音、圖像、數字，進行說、讀、聽、寫、做的活動，表徵 100 以內的數。
  - 數數活動較熟練後，可配合其他課程，做各式各樣的活動。例如：分類數數與記錄活動(參見 1-s-02)、第幾個的活動(參見 1-n-03)、簡單買賣活動(參見 1-n-02)。
  - 數字「87」是指 8 個「十」和 7 個「一」，其中 8 所在的位置即為「十位」，其位值單位為「十」；7 所在的位置即為「個位」，其位值單位為「一」。
  - 位值單位的換算，宜先引導學童用教具，如：數學積木、花片，做十個一堆的點數活動。其中錢幣由於日常生活常用，更是適合位值換算的教學(參見 1-n-02)。例：  
「小真有 4 個『十』元與 16 個『一』元，是多少元？」，先理解 16 個「一」元，可以換成 1 個「十」元與 6 個「一」元；再和 4 個「十」元合起來是 5 個「十」元與 6 個「一」元，記成「56」，小真有 56 元。

1-n-02 能認識 1 元、5 元、10 元等錢幣幣值，並做 1 元與 10 元錢幣的換算。	N-1-01
---	--------

- 說明：
- 錢幣的使用，是學童學習加減法最自然的生活情境，應多運用。例如：做簡單的買賣活動，可以提高學童學習數數與位值換算的興趣。  
底下⑩表示 10 元硬幣，以此類推。

例：「一個娃娃賣 55 元，小娟有 15 元，她還要幾個⑩才夠買一個娃娃呢？」

「小強有 22 元，想要買一個 55 元的鉛筆盒，媽媽要給他幾個⑩才夠？」

「小真有 60 元，她可以買幾張 5 元郵票呢？」

「小傑原來有 14 張 5 元郵票，他再拿 40 元去買每張 5 元的郵票。現在他有幾張郵票？」

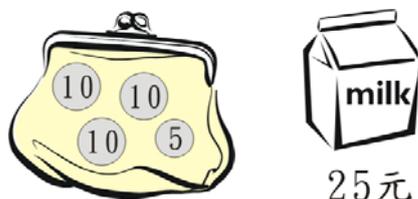
「小琪想買 65 元的飛機模型，她原來有 10 元，媽媽又給她一個 50。  
她的錢夠不夠買呢？」

「小薇想買 65 元的飛機模型，她原來有 25 元，爸爸又給她一個 50。  
她的錢夠不夠買呢？」

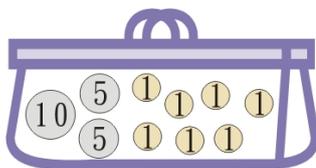
- 點數不同面額的錢幣組合，可以讓學童練習不同的點數方式，題目設計上可以配合 2 個一數、5 個一數及 10 個一數的練習(參見 1-n-07)。
- 進行錢幣換算的教學時，最重要的是 10 元與 1 元的互換，要先進行教學。並在所有錢幣與 1 元的互換基礎上，慢慢理解 10 元相當於兩個 5。
- 一年級進行錢幣的使用教學時，可給定一物品的金額讓學童付錢，例如：怎麼付錢可以剛好買一個 25 元的三明治？可以讓學童嘗試不同的組合方式，以與 1-n-04 互相加強。例：

「買 25 元的鮮奶，怎麼付錢才會剛好？」

(1)下圖是小強的錢包，小強可以拿幾個 10 和一個 5 買鮮奶？



(2)下圖是小真的錢包，小真可以拿一個 10、兩個 5 和幾個 1 買鮮奶？



(3)下圖是小琪的錢包，小琪可以拿幾個 5 和十個 1 買鮮奶？

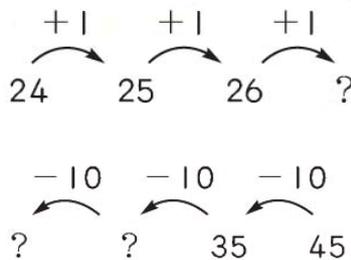


- 利用錢幣做位值換算的教學(參見 1-n-01)。

1-n-03 能運用數表達多少、大小、順序。

N-1-01

- 說明：
- 數的比較含有數量和序數兩種情形，因為數概念比較抽象，可藉由「量」的情境下進行，例：5 枝鉛筆比 4 枝鉛筆多、小強排隊排在第 3 個位置。
  - 教學溝通上要注意序數(第幾個)是有方向性的，必須先講清楚從哪裡開始數；另外也要注意「8 前面(或後面)是什麼數？」、「6 向上(或向下)數是哪一個數？」這類問題，本身有語意溝通的歧義，需和學童溝通一數前後、上下的意思。
  - 建議在一年級起就開始將數的序列圖像化(參見下圖)，和數數活動結合。簡易數線的數數可配合課程持續進行。教師不需拘泥於「第 1」、「第 2」的標示，反而造成學生自然學習的障礙。



- 在此後的數與量教學中，都要進行比較大小的活動。

1-n-04 能從合成、分解的活動中，理解加減法的意義，使用 +、-、= 做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題。

N-1-02  
A-1-01

- 說明：
- 在一年級的加減活動著重在數數活動與合成分解活動的過渡，以及後者的熟悉。
  - 學習加減法，數量不宜過大，但亦不限於一位數。其數量範圍應限制在如：基本加減法、十幾加幾(一位數)、十幾減幾(一位數)、二位數加二位數(不進位)、二位數加一位數(進位)、二位數減二位數(不退位)。
  - 從一年級上學期開始引入，基本加減法應在一年級的下學期完成其熟練。(心算練習，參見 1-n-05)。
  - 在一年級學習將合成分解活動的結果，寫成加減法的橫式紀錄與直式紀錄。例如：7 顆蘋果和 3 顆蘋果合起來是 10 顆蘋果，可以記成  $7+3=10$ ；或 7 顆蘋果中吃掉 3 顆蘋果剩下 4 顆蘋果，可以記成  $7-3=4$ 。教師在教學中應積極建立學童等號為計算結果之意義。
  - 一年級的直式紀錄只是提供直式計算的前置經驗，沒有計算意涵，可在一年級下學期才引入。

- 合成分解活動十分自然，在教學上不必特別區分，讓學童在具體情境與解題中，認識加法與減法的互逆關係(參見 1-a-02)。
- 加減的生活問題中，先固定一數再加(或減)一數的類型最簡單。例：
  - 「母雞第一天孵出 3 隻小雞，第二天孵出 2 隻小雞，一共孵出幾隻小雞？」、「小玲有 8 張卡片，用了 2 張，剩下幾張卡片？」
- 但其他問題類型也應在一年級中練習。例：
  - 「教室裡有 2 個小朋友在看書，6 個小朋友在畫圖，一共有幾個小朋友？」
  - 「王伯伯從百貨公司的 6 樓向上走 1 樓到書店，書店在幾樓？」
  - 「排隊領作業簿，小強的前面已經排了 5 個小朋友，小強排在第幾個？」
  - 「小強排在第 6 個，小玲和小真接著排在他後面，小真排在第幾個？」
  - 「18 個小朋友，一人分一頂帽子，還剩下 3 頂帽子，帽子原來有幾頂？」
  - 「桌上有一些餅乾，弟弟吃掉了 6 塊，還剩下 4 塊，桌上原有幾塊餅乾？」
  - 「8 個小朋友打掃教室，5 個人掃地，其他的人拖地。有多少個人在拖地？」
  - 「牛奶糖一盒要 12 元，小傑有 5 元，小傑還需要多少錢才能買一盒牛奶糖？」
  - 「一個盒子可以裝 36 顆巧克力，已經裝了 15 顆，再放進去幾顆就可以裝滿？」
  - 「排隊買票，張叔叔排在第 17 個，李阿姨排在張叔叔前面第 5 個，李阿姨排在第幾個？」
  - 「電梯從 5 樓到 6 樓，電梯走了幾樓？」
  - 「盒子裡有 17 顆彈珠，拿走幾顆後，盒子裡剩下 8 顆彈珠？」
  - 「16 個小朋友，一人吃一枝冰棒，有 4 人沒有吃到，冰棒有多少枝？」
  - 「班上有男生 14 人，女生 17 人，男生多還是女生多？多幾人？」
  - 「小娟有 4 枝彩色鉛筆，小麗比小娟多 3 枝，請問小麗有幾枝彩色鉛筆？」
  - 「姊姊有 15 元，弟弟的錢比姊姊少 5 元，弟弟有多少錢？」
- 在前述問題的教學中，讓學童掌握使用教具(如花片)或畫圈圈來理解這些問題的結構，並協助解題。讓學童在合成分解的活動或表徵情境裡，慢慢掌握橫式紀錄的意義。
- 在恰當教學時機，應讓學童理解某數 + 0 與 - 0，其結果不變的事實。

- 在加減法教學中，若要檢查兒童對所給定的加減算式是否理解，可讓學童練習擬出對應的生活應用情境。

1-n-05 能熟練基本加減法。	N-1-02
------------------	--------

- 說明：
- 本細目目的在養成學童心算的能力和習慣，作為日後計算的基礎。
  - 熟練的意思是，能夠不透過數數就知道答案。
  - 基本加減法包括：(1)加 1 與減 1；(2)加 10 與減 10；(3)合 10 與拆 10；(4)被加數與加數為一位數的加法(例： $4 + 8 = 12$ )；(5)前者之逆運算(例： $12 - 8 = 4$ )。
  - 例：可用心算卡配合遊戲進行基本加減法、合十、拆十等練習，或從最簡單的逐次加一、逐次減一、逐次加十、逐次減十的心算開始。
  - 可利用下列填空題加強基本加減法的熟練： $3 + \square = 9$ ； $\square + 7 = 15$ ； $10 - \square = 7$ ； $\square - 4 = 8$ 。此處並非加減互逆之教學，而是熟練基本加減法之練習。
  - 教師在基本加減法可以使用的情況或問題中，可鼓勵學童使用心算。從一年級上學期開始引入，基本加減法應在一年級的下學期完成其熟練。
  - 但是這不表示一年級的加減法問題僅限於基本加減法，例如：學童還是要會用數數或其他合成分解的策略來解決問題。例：
    - 「 $29 + 3 = ?$ 」，「 $21 - 4 = ?$ 」，可以用向上數或向下數的策略解題。
    - 「 $18 + 21 = ?$  (不進位)」，「 $53 - 22 = ?$  (不退位)」，可以將題目中的各數分解成幾個十和幾個一，先算有幾個「一」，再算有幾個「十」。
    - 「 $14 + 7 = ?$  (進位)」，可以將題目中的被加數分解成幾個十和幾個一，將被加數的幾個「一」和加數的幾個一相加，如： $4 + 7 = 11$ (這是基本加法的範圍)，再將其結果加上被加數的幾個「十」，如： $11 + 10 = 21$ 。

1-n-06 能做一位數之連加、連減與加減混合計算。	N-1-02
----------------------------	--------

- 說明：
- 本細目之目的在熟練基本加減法(參見 1-n-05)，由於學童剛學加減法，在一年級只做一位數的連加算式運算即可。此時加數與減數的個數不宜太多，三個以內為限。
  - 一年級學童在計算連加或連減的計算時，可以練習調整順序，靈活的計算，例如：
    - 三個數連加： $1 + 5 + 9$  可以先算  $1 + 9 = 10$ ，再算  $10 + 5 = 15$ 。

三個數連減： $18-9-8$  可以先算  $18-8$ ，再算  $10-9=1$ 。

- 有關加減混合計算的部分，在本年級建議仍依照算式中數字出現的順序來做。

1-n-07 能進行 2 個一數、5 個一數、10 個一數等活動。

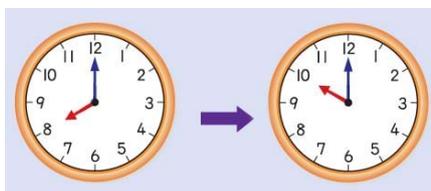
N-1-01  
N-1-04

- 說明：
- 進行 2 個一數、5 個一數、10 個一數等活動為乘法的前置活動。
  - 運用花片之類的教具進行幾個一數的過程，排成整齊的行列形狀，可作為乘法「陣列模型」的前置經驗(參見 2-n-06, 2-a-03)。
  - 例：利用百數表教具，進行幾個一數的數數活動，將數過的數，圈出來或羅列成簡單數列。可以讓學生觀察上述從百數中圈出來的數列，得到下列結果：  
2 個一數時，個位數字會重複出現 2、4、6、8、0。  
5 個一數時，個位數字會重複出現 5 和 0。

1-n-08 能認識常用時間用語，並報讀日期與鐘面上整點、半點的時刻。

N-1-11

- 說明：
- 先進行幾個事件發生先後順序的辨識活動。
  - 能使用常用時間用語，如上午、中午、下午或今天、昨天、明天，並知道其先後順序。
  - 能查閱日曆、月曆或年曆上的日期，知道今天是「幾月幾日星期幾」。
  - 能認識鐘面上的長、短針，並報讀時鐘上常用的時間刻度，在一年級只做整點或半點的報時。如「1 點鐘」、「3 點半」。
  - 能依據鐘面圖報讀指定時刻的前、後 1(或 2)小時的時刻。例如：「小娟 8 點起床，2 小時後是幾點？看著鐘面圖做做看。」



1-n-09 能認識長度，並做直接比較。

N-1-08  
S-1-01  
S-1-03

- 說明：
- 能透過觀察、操作，認識「長」、「短」、「高」、「矮」的含意，學會比較物體的長短、高矮的方法。

1-n-10 能利用間接比較或以個別單位實測的方法比較物體的長短。

N-1-08

- 說明：
- 量的教學請參見附錄一中「量與實測」的主題說明。
  - 這邊的個別單位不見得是常用單位(例如：手臂長、掌幅、紙條、迴紋針等都可作為個別單位)。
  - 長度是國小最早學習的量，具有量之學習的指標作用，而且又是數線與小數概念的入口，教師務必小心處理此細目，完成利用個別單位測量與距離觀念的連結。例如：可以要求學童以一步為單位，測量距離(步數)，讓學童知道可利用「單位」來量度「距離」。
  - 在本細目中也應處理以個別單位為基礎的長度合成分解活動，作為長度加減(參見 2-n-15)與數線加減(參見 3-n-09)的前置經驗。例如：
 

「將一條長繩對摺後，用積木測量，量出來對摺後的長度和 5 條積木一樣長，把對摺的繩子打開，這條繩子的長度有「5+5」條積木長。」

「用積木測量水桶開口一圈的長度，大概有 9 個積木長，水桶的把手大概有 5 個積木長，水桶開口一圈比水桶把手大概多了「9-5」條積木長。」
  - 重點是學童能將合成分解的經驗、加減運算，與長度比較的經驗連結起來。

## 幾何

1-s-01 能認識直線與曲線。	S-1-01
<p>說明：</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ 從具體活動的操作中，知道連結兩點(手指)間的線(繩子)，以直線為最短。例如：           <p>「在一條木條上的兩端掛上繩子，繩子下垂成一弧線，讓學生觀察木條和繩子，那一個比較長？」</p> </li> </ul>	
1-s-02 能辨認、描述與分類簡單平面圖形與立體形體。	S-1-01
<p>說明：</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ 在此時期，只要訴諸學童之幾何直覺即可，不必強調其構成要素。在名稱的溝通上，可以先讓學童隨意發揮，啟發學童對圖形結構的體驗，教師再歸結到常用的名稱，並做合理的說明(不需要拘泥在嚴格的定義)。</li> <li>■ 簡單平面圖形，如：圓形、三角形、正方形、長方形等；簡單立體形體，如：球體、正方體、長方體、圓柱體等。</li> <li>■ 本細目可以與其他分類與數數的教學活動相結合，例如：1-d-01、1-d-02。</li> </ul>	
1-s-03 能描繪或仿製簡單平面圖形。	S-1-02

- 說明：
- 例：以塗色或套描進行描繪活動或其他組合活動。
  - 學童的肌肉還不能做細密的協調，不宜做精確的要求。只是在仿製活動中，體驗平面圖形的結構特徵。

1-s-04 能依給定圖示，將簡單形體做平面鋪設與立體堆疊。	S-1-02
--------------------------------	--------

- 說明：
- 本細目的目標在經驗空間感與全等操作，可整合成一教學活動。
  - 給定的圖示可為圖卡或實物，透過拼圖與堆積木等活動，讓學童進行平移、翻轉、重疊、比對…操作。
  - 本細目讓學生體認全等的經驗意涵，是日後幾何學習的基礎。但「全等」一詞在一年級教學現場不應出現。

## 代數

1-a-01 能在具體情境中，認識加法的交換律。	A-1-02
--------------------------	--------

- 說明：
- 本細目為「檢查細目」，可以併入整數教學單元(或章節)中進行(參見 1-n-04)，不一定要另立單元(或章節)教學。
  - 例：小明左口袋有 3 顆糖，右口袋有 4 顆糖，要計算總量時，知道不論左口袋加右口袋得  $3+4$ ，或右口袋加左口袋得  $4+3$ ，結果都一樣。學童也可能在合成分解活動中，理解此事實。

1-a-02 能在具體情境中，認識加減互逆。	A-1-03
------------------------	--------

- 說明：
- 本細目為「檢查細目」，可以併入整數教學單元(或章節)中進行(參見 1-n-04)，不一定要另立單元(或章節)教學。
  - 兒童在合成分解的情境中，瞭解 7 個花片和 6 個花片可以合成 13 個花片，也知道 13 個花片拿掉 6 個剩下 7 個花片，13 個花片拿掉 7 個剩下 6 個花片。
  - 例(參見 1-n-04)：「小華有 5 元，牛奶糖一盒要 12 元，小華還需要多少錢才能買一盒牛奶糖？」雖然這個問題的敘述是一個加法型的問題，但是欲求的答案並不是和，學童透過合成分解之解題活動得到答案是 7，同時進一步知道  $12-5$  之答案也等於 7，而獲得原題目之求解可以透過  $12-5$  之運算得到答案之經驗。
  - 例(參見 1-n-04)：「桌上有一些餅乾，弟弟吃掉了 6 塊，還剩下 4 塊，桌上原有幾塊餅乾？」
  - 例(參見 1-n-04)：「盒子裡有 17 顆彈珠，拿走幾顆後，盒子裡剩下 8 顆彈珠？」

- 暫不強調較形式層次的加減互逆(參見 2-a-04)，但可做練習。
- 加減互逆為等量公理的一種表現形式。

### 統計與機率

1-d-01 能對生活中的事件或活動做初步的分類與記錄。

D-1-01

- 說明：
- 讓學童自由發揮，允許學童多元的分類與記錄方式，只要能夠將資料加以整理即可。
  - 例：班上同學的早餐種類紀錄；班上同學的出生月份；對給定不同顏色色紙的分類；班上同學最喜歡卡通的紀錄；班上工作分配的人數列表；幾何形體教具的分類(參見 1-s-02)。上課的課表，也是一種表格紀錄的方式，應鼓勵學童製作。
  - 例：利用班級資源回收活動做初步的分類與記錄活動。

1-d-02 能將紀錄以統計表呈現並說明。

D-1-01

- 說明：
- 讓學童將分類與數量的紀錄，製作成表格式統計表。
  - 例：將班級資源回收紀錄以統計表呈現並說明。
  - 例：小強利用下列其中一種表格將書包裡面鉛筆、剪刀及書本的個數記錄下來。

分類別	鉛筆	剪刀	書本
數量	3	1	5

、	✂	冊
3	1	5

鉛筆	剪刀	書本
下	-	正

、	✂	冊
下	-	正

## 2.二年級細目詮釋

### 數與量

2-n-01 能認識 1000 以內的數及「百位」的位名，並進行位值單位換算。	N-1-01
---	--------

- 說明：
- 參見 1-n-01、1-n-02。
  - 新增位值單位為「百位」，並認識 100、10 和 1 彼此之間的關係。
  - 學生可以使用已習得的整數的讀音和記法來類推新數量，不過教師在引進新數、建立數詞序列時，須注意學生對於不可類推的數字，例如：99→100→101(過百)，109→110→111(過十)……的相關學習活動。
  - 此時位值單位的換算可讓學童進行如 4 個「百」16 個「十」可以換成 5 個「百」6 個「十」，也就是 560 個「一」，記成「560」。
  - 學童在二年級宜逐漸脫離以點數具體物件來認識所有數的習慣，應能彈性結合位值與局部數數，作為計算上的一種策略，例如：用數數計算「199+3」或「301-3」等。

2-n-02 能認識 100 元的幣值，並做 10 元與 100 元錢幣的換算。	N-1-01
--	--------

- 說明：
- 參見 1-n-02。
  - 先認識錢幣(1 元、5 元、10 元、100 元)與 1 元的互換基礎，慢慢理解 10 元相當於兩個 5 元硬幣，100 元相當於 10 個 10 元等事實，進行錢幣之間的換算，並讓學童嘗試點數不同錢幣的組合。

2-n-03 能用 <、=與> 表示數量大小關係，並在具體情境中認識遞移律。(同 2-a-01)	N-1-01 A-1-01
--	------------------

- 說明：
- 數量大小比較是基本的數感，本細目旨在建立 <、=、> 的使用習慣。等號兩邊數量相等觀念的學習，有助於學童建立良好的列式習慣，也是等量公理的前置經驗。
  - 在介紹「<」或「>」的符號時，可讓學童知道接近開口位置的數比較大，接近尖點位置的數比較小。
  - 應有如下之問題，讓學生知道數字和算式可出現在比較符號之兩邊，可加強學童對於 <、=、> 意涵的理解。  
例：在□中填入 <、=、>：  
16 □ 14+12      11+13 □ 14      2+7 □ 4+5
  - 「遞移律」一詞不應出現於教科書或教學中。

- 例：知道小明與小英的糖果一樣多，小英和小華糖果一樣多，那麼小明和小華的糖果就一樣多。
- 例：從觀察中知道小明比小華矮，小華比小英矮，所以小明會比小英矮。
- 例：從觀察中知道馬比大象輕，狗比馬輕，所以三者中，狗最輕，大象則最重。
- 例：能說明為什麼小明的糖果比小英的糖果多，小華的糖果比小英糖果少，所以小明的糖果是三個人中最多的。

2-n-04 能熟練二位數加減直式計算。	N-1-02
	N-1-03

- 說明：
- 在一年級只做加減法的直式紀錄，並未說明其原理。二年級可運合成分解，解釋加減直式計算的原理，知道直式計算的書寫方式是利用不同位值來表達數字的意義，並理解進位、退位的意義。建議可使用錢幣或數學積木的情境，來教導加減法直式計算。
  - 加減直式計算是具一般性的優越格式，但是教師仍應強調彈性使用其他加減策略的時機，避免讓加減直式計算變成唯一壟斷的解題方式。例如：除非是作為說明進位或借位的範例，否則在計算  $199+2$  或  $50-2$  時，可以用簡單的數數、心算、分解即可解題，沒有必要用直式來計算。
  - 學習加減直式計算的順序應由淺入深，從無進位、無退位的情況開始，直到雙重進位之加法。由於雙重退位的減法較難，在三年級才進行。在直式計算中，應多運用心算(參見 1-n-05)。可讓學生做下列心算練習：
 

例： $97+8$  可以把 8 想成  $3+5$ ，所以  $97+8$ ，可以先將 97 和 3 合起來是 100，再做  $100+5$  是 105。

例： $103-7$  可以把 100 想成  $100+3$ ，所以  $103-7$  可以用 100 減 7 再加 3 得到 96。
  - 運用相同的解釋，學生也要能做連加的直式計算，並能夠結合基本加減法與數序交換的習慣，靈活計算(參見 2-a-02)。這是日後乘法直式計算的基礎。
  - 採用從個位加起的直式計算法，主要的考慮在於計算的負擔較輕、出錯的可能性較小，而且加、減法都適用。

2-n-05 能理解三位數加減直式計算(不含兩次退位)。	N-1-02
	N-1-03

- 說明：
- 以二位數直式計算的理解基礎，可以輕易理解三位數的直式計算。

但由於位數含百位，課程可安排在二年級下學期再進行教學。

- 在布題時，應注意類型之完備，即使是一次進、退位，也應包含個位進十位、十位進百位、百位退十位、十位退個位。讓學生能領略二位數直式計算如何體現在三位數直式計算中。
- 二年級的減法雖然有不做兩次退位的限制，但應該包含被減數為100，減數為一或二位數的減法，作為三年級兩次退位減法的前置經驗。

2-n-06 能理解乘法的意義，使用 $\times$ 、 $=$ 做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題。

N-1-04  
A-1-01

說明： ■ 乘法是小學整數教學的重點，其核心為排列模型的理解與九九乘法的熟練

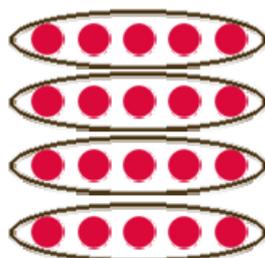
(參見 2-n-08)。

- 在二年級裡，應先以連加(參見 1-n-06)、幾個一數(參見 1-n-07)為乘法的前置經驗。讓學生認識乘法的意義，例如：2 有 4 個，可以記成  $2 \times 4 = 8$ ， $2 \times 4$  表示 2 的 4 倍。學童應認識乘法算式中「被乘數」(單位量)、「乘數」(單位數)及「積」(總和)的位置。
- 應從乘數較小的乘法開始練習，慢慢養成心算的習慣，然後開始練習九九乘法(參見 2-n-08)。雖然二位數乘以一位數的乘法不是二年級乘法教學的範圍，但是也可以讓學童練習如  $23 \times 2$  的乘法，學童可以利用所學過乘法意義，透過 23 連加兩次來求出答案，但建議乘數最多為 3 即可。
- 乘法的「倍」的意義，是乘法問題中最容易入手的一種。但乘法教學的常見困難也在於，用算式記錄「倍」時是不對稱的，而乘法卻滿足交換律，因此經常造成教學上的困擾。採用下列陣列型的乘法問題情境，可以協助孩子乘法交換律的學習，減輕這種困擾：

(1)先讓學童用花片排成下圖(例：5 個一數)。



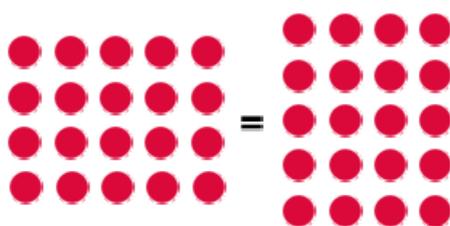
(2)在「幾的幾倍」的解題活動中(這時的問題，例如：「1 排學生有 5 個人，4 排學生，有幾個人？」)，持續將學童的解題與排列模型連結起來。並將問題中的「單位」(例如：「排」)對應起來(例如：圈起來)。



(3)用「5 個人的 4 倍是多少？」之類的问题，來檢查學童是否能直接從問題，將 5 個人視為一個單位。

(4)若(3)已檢查，則可以用排列模型來討論乘法交換律，這時學童應

能從排列模型理解「5 個人的 4 倍」與「4 個人的 5 倍」一樣多。



(5)在這段教學過程中，如果教師想確定學童是否瞭解題意，可以暫時要求學童加上物體的計數單位(例如： $5 \text{ 顆} \times 4 = 20 \text{ 顆}$ )

- 教師應領會排列模型之於乘法，與合成分解模型之於加減法，是最本質又互相融洽的兩個模型，在解題、概念理解、掌握運算性質(參見 2-a-03， 3-a-01)、推理上都有相當多的好處。因此在教學上要有意識地向排列模型過渡。乘法的「倍」的意義不是乘法意義的全部。教師要確定的是在解題情境中，學童能正確地說明其算式的意義，但是在解題的程序上，終究要允許學童運用任何策略來計算。舉例來說，「一枝筆 3 元，24 枝筆要多少錢？」，學童應能依照約定列出「3 元 $\times$ 24」或「3 $\times$ 24」，但若學童理解交換律，在計算時將問題轉換成「24 $\times$ 3」，並用連加法  $24 + 24 + 24 = 72$ ，應視為正確(假設學童還不會乘法直式計算)，這比讓學童將 3 連加 24 次，更值得鼓勵。
- 二年級的乘法直式紀錄只是提供直式計算的前置經驗，沒有計算意涵，可在二年級下學期才引入。

2-n-07 能在具體情境中，進行分裝與平分的活動。

N-1-05  
N-1-06

- 說明：
- 這是除法的前置活動，學童可能透過操作、連減、連加或乘法的策略解題，但最後仍應讓學生認識分裝和平分的問題和乘法的關連(因此分裝與平分問題中的數量應在九九乘法的範圍內)。暫時不引入含除號的紀錄，並只處理能分盡(無餘數)的情形。
  - 在進行分裝和平分的活動時，應將乘法和除法的關係連結起來。例如：在進行「12 個小朋友搭碰碰車，1 個車廂最多坐 4 人，可以坐滿幾個車廂？」的解題時，也要同時進行「1 個車廂最多坐 4 人，3 個車廂可以坐滿幾人？」的解題。
  - 「分裝」的活動，指如「12 個杯子，2 個杯子裝一盒，可裝幾盒？」的問題。
  - 「平分」的活動，指如「24 個男生睡在 3 個帳篷裡，每個帳篷裡的人一樣多，一個帳篷裡有幾個男生？」的問題。

2-n-08 能理解九九乘法。	N-1-06 A-1-02
-----------------	------------------

- 說明：
- 這裡所謂九九乘法，包含乘數或被乘數是 10 的情形。
  - 學習九九乘法不宜在短時間要求學生硬背，應將九九乘法的教學分別安排在二年級上、下學期，並考慮學生可能的經驗(例如：學生較熟悉的 2 個一數、5 個一數或 10 個一數，因此先進行被乘數為 2、5、10 的乘法，接著從累加上比較容易計算的數，例如：被乘數為 4 的乘法，最後再進行被乘數為 3、6、9、7、8 的乘法)，像這樣分階段的教學，一方面深化學生學習乘法的意義、「倍」的使用、認識不同乘數在乘法表的模式差異、交換律的觀察等。這些都是完整數感的一部分。
  - 學童透過陣列模型的乘法問題情境，認識乘法可以交換的性質，進而可以利用交換律來學習新的九九乘法。例如：學童先學到  $2 \times 3$  和  $3 \times 2$  的結果一樣，在後續學到  $7 \times 4$  時，就可以利用交換律，以先前學過的  $4 \times 7$  來找出答案。

2-n-09 能在具體情境中，解決兩步驟問題(加與減，不含併式)。	N-1-07
-----------------------------------	--------

- 說明：
- 從日常生活情境中，引入兩步驟問題(加與減)。學童在解兩步驟問題時，應能將各步驟分開記錄列式，二年級時不處理併式的問題。
  - 例 1：「用 20 公分的尺量一條繩子，剛好量了 3 次，繩子長幾公分？」
  - 例 2：「一條鐵絲先用去 25 公分，再用去 20 公分，還剩下 15 公分。鐵絲原來有多少公分？」
  - 例 3：「學校課輔班原來有 67 個小朋友，五點鐘時走了 35 位小朋友，六點鐘時又走了 25 位小朋友，還剩下幾位小朋友？」
  - 例 4：「有一輛公車上有 35 位乘客，到站時，從前門下去 9 位乘客，後門上來 4 位乘客，車上現在有幾位乘客？」
  - 例 5：「小強有 30 元，哥哥有 25 元，小英有 60 元，小強和哥哥的錢合起來比小英少幾元？」
  - 學童應能從合成的模型知道連加的結果與加的順序無關，並能善用這個想法來解決第 1 例的問題，也能運用這個想法來做一般的連加直式計算。這是利用計算律可以幫忙解題的第一次經驗，學童應該從教師的布題中認識到，解題時不是一味的計算，有時要先做某種判斷。
  - 第 2、3 例中，如果利用恰當的計算律，也可以較容易解題，但在二年級暫時不需強調，學生能依自己的步驟解題。若現場有時間，教師可以作為討論的題材，但不該作為二年級的評量(※不宜評量)。

**2-n-10 能在具體情境中，解決兩步驟問題(加、減與乘，不含併式)。****N-1-07**

- 說明：
- 從日常生活情境中，引入兩步驟問題(加、減與乘)。學童在解兩步驟問題時，應能將各步驟分開記錄，二年級時不處理併式的問題。
  - 例：「一盒麻糬有 8 粒，3 盒又 2 粒共有多少粒麻糬？」。一開始，學童先學習讀懂題意，分段解決這個問題，如先算 3 盒有幾粒( $8 \times 3$ )，再加上 2 粒( $24 + 2$ )。
  - 例：「一盒毬子有 7 個，合作社裡原有 3 盒，賣了 19 個後，還剩下幾個？」
  - 例：「扯鈴 55 個，10 個裝成一盒，裝了 5 盒後，還剩下幾個？」
  - 例：「把一些麻糬分裝在 7 個盒子裡，每盒裝 6 粒，還剩下 4 粒，原來有多少粒麻糬？」
  - 例：「把一些糖果平分給 9 個小朋友，如果每人分 6 顆，就不夠 4 顆，糖果有幾顆？」
  - 例：複習時鐘的報讀，給定一個鐘面時刻(如：3 時 47 分)，讓學生練習用先乘後加，如  $5 \times 9 = 45$ ， $45 + 2 = 47$  兩個步驟列式算出鐘面分針的時刻。
  - 例：「一枝鉛筆 10 元，小強買了 8 枝，付了 100 元，可以找回多少元？」
  - 例：「一盒水果軟糖中，橘子口味的有 5 顆，檸檬口味的有 3 顆，小玲買了 6 盒，請問小玲共有多少顆水果軟糖？」，這個問題可以先算每盒有  $5 + 3 = 8$  顆軟糖，再算總共有  $8 \times 6 = 48$  顆軟糖。
  - 例：「果汁一瓶原來賣 20 元，今日特價 15 元，爸爸買了 6 瓶，省了多少钱？」
  - 例：「6 隊小朋友參加趣味競賽，每隊有 2 個男生和 4 個女生，男生比女生少幾人？」

**2-n-11 能做簡單的二位數加減估算。****N-1-02**

- 說明：
- 估算教學請參閱附錄一中「估算」的主題說明。
  - 估算是比較高層次的數學能力，在教學時，首先應確定學童有正確計算的能力，並透過恰當的問題，來訓練學童的估算能力，讓學童在日常應用中，能有判斷的依據。教師應以恰當的問題引導，讓學童深刻認識估算的好處，以提高其學習動機與成效。
  - 教師不宜在評量時，直接要求標準答案，也切忌認為使用正確計算的學童是錯誤的。
  - 例：「 $32 + 49 = ( )$ ，下面的 3 個數中，那一個最接近正確的答案？」

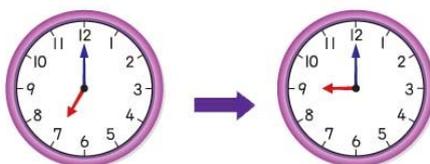
70 80 90」由於 32 大概是 30，49 大概是 50， $30+50$  的答案大概是 80。

- 例：「 $71-29=( )$ 」，下面的 3 個數中，那一個最接近正確的答案？  
30 40 50」由於 71 大概是 70，29 大概是 30， $70-30$  的答案大概是 40。
- 本細目只是四捨五入教學之前置經驗，個位數限於 8, 9, 0, 1, 2。

2-n-12 能認識鐘面上的時刻是幾點幾分。
------------------------

N-1-11
--------

- 說明：
- 1-n-08 的時鐘報讀是以「半個鐘頭」為單位。二年級先認識鐘面上的刻度一大格是 5 分鐘，由「5 個一數」，知道鐘面上的數字所對應的幾分時刻。再認識鐘面上的 1 小格是 1 分鐘，結合五個一數和一個一數，進行鐘面時刻的有效報讀。
  - 在報讀鐘面時刻的活動中，讓學童觀察鐘面，做「7 點 55 分的時針接近 8，但還不到 8 點」、「8 點 5 分是時針接近 8，但超過 8 點」的練習，協助學童掌握時針所在位置代表的正確數值。
  - 能觀察鐘面圖點數兩個時刻之間的時間。例如：



「爸爸早上 7 點從臺北搭車出發，9 點到達臺中，從臺北到臺中，爸爸花了多少時間？」

2-n-13 能認識「年」、「月」、「星期」、「日」，並知道「某月有幾日」、「一星期有七天」。
---

N-1-11
--------

- 說明：
- 學童藉查看年曆，認識一年有 12 個月，以及各月的日數、每星期的日數。
  - 例：藉由查看月曆，計算 7 月加 8 月的總日數。
  - 例：藉由查看月曆，知道如何計算暑假的天數。
  - 例：知道每月至少有(大概有)4 星期。

2-n-14 能理解用不同個別單位測量同一長度時，其數值不同，並能說明原因。	N-1-08
--	--------

- 說明：
- 這是單位換算的前置經驗，透過合成分解的活動，理解不同單位間換算的模式(亦稱「化聚」)。
  - 例：請小朋友拿出一枝筆來量一量老師的桌子有多高，量出來書桌的高度分別和「小強的 8 枝鉛筆」、「小娟的 6 枝鉛筆」一樣高。學童對於「8」和「6」的不同，應能說明是因為小強鉛筆的長度和小娟鉛筆的長度不同。並且知道 6 之所以小於 8 的原因，是因小娟的鉛筆長度大於小強的鉛筆長度。
  - 例：小英說：「我家冰箱有 4 條紅繩那麼高」，小華說：「我家冰箱有 7 條藍繩那麼高」，誰家的冰箱比較高呢？學童應理解小英、小華應該用一樣長的繩子量冰箱，才能比較誰家的冰箱比較高。這只是討論題，不該作為二年級的評量。(※不宜評量)

2-n-15 能認識長度單位「公分」、「公尺」及其關係，並能做相關的實測、估測與同單位的計算。	N-1-08 N-1-09
---	------------------

- 說明：
- 量的教學初期應避免同時引入兩個量。建議在二年級上學期，介紹「公分」並做實測、估測與計算。下學期再介紹「公尺」，除了實測與估測外，也引入單位換算與相關計算。
  - 學童在認識「1 公尺 = 100 公分」的關係並理解其意義後，知道可利用單位換算，記錄測量值。例如：小明的身高為 123 公分，也可以記成 1 公尺 23 公分。
  - 認識刻度尺上的刻度結構是學童建立 1 公分量感的入口，可引導學童測量身體的部位，如量身高、手指的寬度，作為以後公分量感估測的基礎。
  - 刻度尺的使用應注意「對齊 0」，再報讀尺上對應的數字，此時不強調毫米的刻度，僅就公分刻度做判讀。所測量物體如果不是整數公分單位，則以「大約多少公分」做報讀。
  - 可引導學生討論：如果是一把斷掉的尺，無法從 0 對齊時，若所測量的物體是從刻度 5 到 8，則這個物體有 3 公分長，亦即 5 到 6 是 1 公分；6 到 7 是 1 公分；7 到 8 是 1 公分；共 3 公分。而非點數尺上的數字 5、6、7、8，長度為 4 公分的迷思概念。
  - 例：「用 20 公分的尺量一條繩子，剛好量了 3 次，繩子長幾公分？」(參見 2-n-09)
  - 例：「一條鐵絲先用去 25 公分，再用去 20 公分，還剩下 15 公分。」

鐵絲原來有多少公分？」(參見 2-n-09)

- 例：「用 10 公分的尺量桌子的邊長，剛好量了 6 次。桌子的邊長是幾公分？」(參見 2-n-06)。
- 例：「黑繩有 175 公分長，紅繩是黑繩的 2 倍長，紅繩長幾公分？」(參見 2-n-06)。
- 量的估測活動不是實測的近似值，而是培養量感的活動，原則上，在不使用正式測量工具的條件下，「估測」量的大小，因此量的估測與量的經驗很有關係。有好的量感，對日常生活很有助益，但是估測教學就數學課程而言並不宜過度評量。(※不宜過度評量)
- 做估測活動時，應注意單位的合理性。例如：二年級的學童只學過整數，因此用公尺來估計人的身高並不合適，但是如果結合公分，則為適當。
- 例：學童可以用目測，估計自己的指幅(如食指的寬度大約 1 公分)和掌幅(手掌張開，拇指至小指張開的長度大約 10 公分)有多少公分。
- 例：估計自己的身高(也可以用生活中常見的物品，如：教室中的掃把、書桌等)比 1 公尺長或短。
- 能從具體情境中，認識長度的遞移關係。例：從觀察中知道小明比小華矮，小華比小英矮，所以小明會比小英矮。

<b>2-n-16 能認識容量。</b>	<b>N-1-10</b>
----------------------	---------------

- 說明：
- 量的教學請參見附錄一中「量與實測」的主題說明。
  - 容量是和長度一樣，是既容易學習，又和數學教學有密切關係的量，在分數和小數的學習上都會自然用到容量。
  - 本細目是認識容量的起點，應包含容量的直接比較、間接比較，以及個別單位的教學內容。
  - 本細目為 3-n-15 引入容量常用單位之前置經驗。

<b>2-n-17 能認識重量。</b>	<b>N-1-10</b>
----------------------	---------------

- 說明：
- 量的教學請參見附錄一中「量與實測」的主題說明。
  - 小學所學的七種量中，「重量」、「時間」是比較不一樣的量，其他五種量都與視覺或幾何感有關，較適合做直接比較。但是「重量」完全依賴於身體的感覺，因此所謂直接比較，頂多只能用手(單手測量兩次或左右手同時)經驗重物與輕物的差別，而且兩物的重量不宜過近。
  - 本細目是認識重量的起點，為了彌補以身體感覺學習重量之不足，重量之教學應早早引入天平的教學(由學童基於對稱性之直覺，相信

天平兩邊的物品重量相等)，作為重量的直接比較。並由此學習重量的間接比較和個別單位。

- 能從具體情境中，認識重量的遞移關係。例：從觀察中知道大象比馬重，馬比小狗重，所以大象會比小狗重。
- 本細目為 3-n-16 引入重量常用單位之前置經驗。

2-n-18 能認識面積。(同 2-s-04)	N-1-10 S-1-03
-------------------------	------------------

- 說明：
- 量的教學請參見附錄一中「量與實測」的主題說明。
  - 本細目是認識面積的起點。「面積」一詞建議不出現在教學與課本中。由於面積是幾何量，可以用視覺來做比較。不過做面積的直接比較時，應只處理一圖形包含於另一圖形的情形，不宜處理無法包含的情況。
  - 面積的個別單位應只處理最簡單而重要的情況：正方形或長方形的個別單位。其他圖形則應只作為較進階的補充題材。

## 幾何

2-s-01 能認識周遭物體上的角、直線與平面(含簡單立體形體)。	S-1-03
-----------------------------------	--------

- 說明：
- 例：指出平面圖形的角、邊的位置與個數，並能使用「角」、「邊」的名詞與人溝通。
  - 例：應進行在簡單立體形體中(參見 1-s-02)，認識「頂點」、「邊」與「平面」的教學活動。
  - 例：由面的大小比較，知道正方體的每個面都一樣大。
  - 例：由邊長的比較，知道正方體的每個邊長都相等。
- 上述二例不是要定義正方體，只是簡單的藉由比較活動知道正方體的面與面、邊與邊的關係。

2-s-02 能認識生活周遭中平行與垂直的現象。	S-1-04
--------------------------	--------

- 說明：
- 透過觀察長方形、正方形、直行信紙、各式窗格、欄杆、梯子等，認識垂直與平行的現象。希望學童能注意到窗格垂直與切蛋糕四等分的方式相同、平行大致上是寬度相同的意思、從窗格觀察到垂直與平行間的關係。

2-s-03 能使用直尺處理與線段有關的問題。	N-1-08 S-1-02
-------------------------	------------------

- 說明：
- 能使用直尺畫出指定長度的線段。單位限「公分」，指定畫出線段的

長度應小於學童所用直尺的長度。

- 能畫出兩點間的線段，並測量兩點的距離，測量距離應小於 15 公分。學生應知道兩點間的距離就是該線段的長度。
- 基本上在學習使用直尺畫線。由於學童手部肌肉尚未發展成熟，教師不宜過度評量。(※不宜過度評量)
- 使用直尺畫線段，可以讓學童體會兩點決定一直線，並可度量其距離的事實，但在教學上不必提及這些性質。

2-s-04 能認識面積。(同 2-n-18)	N-1-10 S-1-03
-------------------------	------------------

2-s-05 認識簡單平面圖形的邊長關係。	N-1-08 S-1-01 S-1-03
-----------------------	----------------------------

- 說明：
- 由實測邊長，知道正方形的四邊相等、長方形的兩對邊長相等、正三角形的邊長相等、等腰三角形的兩腰相等。
  - 以上的專有名詞(對邊、等腰三角形、腰)在教學上不應出現。
  - 此細目不是要定義平面圖形，只是簡單的藉由實測知道一些常見幾何圖形的邊長性質，這些圖形都有明顯的對稱性質，學童較容易掌握其特徵。

## 代數

2-a-01 能用 $<$ 、 $=$ 與 $>$ 表示數量大小關係，並在具體情境中認識遞移律。(同 2-n-03)	N-1-01 A-1-01
--	------------------

2-a-02 能在具體情境中，認識加法順序改變並不影響其和的性質。	A-1-02
-----------------------------------	--------

- 說明：
- 本細目為「檢查細目」，可以併入整數教學單元(或章節)中進行，不一定要另立單元(或章節)教學。
  - 從分解合成的模型可簡單認識這個性質，這個性質是加法運算的精髓，是交換律的深化。事實上交換律與結合律都是這個性質的展現。
  - 作為代數運算公設的結合律，在教學上並不自然。只要學生認識加法順序並影響和的性質，自然能理解結合律。

- 例：「小明有 3 顆糖，小華有 4 顆糖，小麗有 7 顆糖，合起來共有多少顆糖？」，學童可以在具體情境中發現，可以先算 3 顆糖和 7 顆糖合起來有 10 顆，再算和 4 顆合起來有 14 顆。

<b>2-a-03</b> 能在具體情境中，認識乘法交換律。	<b>A-1-02</b>
--------------------------------	---------------

- 說明：
- 本細目為「檢查細目」，可以併入整數教學單元(或章節)中進行，(參見 2-n-06, 2-n-08)，不一定要另立單元(或章節)教學。「乘法交換律」一詞建議不出現在四年級(包括四年級)以前的教學與課本中。
  - 學童在解「一排有 7 個人，4 排有幾個人？」的問題時，他可以看成一排有 7 個人，有 4 排，得  $7 \times 4$ ；或一列有 4 個人，有 7 列，得  $4 \times 7$ ，結果都一樣(參見 2-n-06)。
  - 認識乘法交換律以後，知道九九乘法表中有一半的乘法事實可以透過交換律得到(參見 2-n-08)。

<b>2-a-04</b> 能理解加減互逆，並運用於驗算與解題。	<b>A-1-03</b>
----------------------------------	---------------

- 說明：
- 本細目為「檢查細目」，可以併入整數教學單元(或章節)中進行(參見 2-n-04)，不一定要另立單元(或章節)教學。「加減互逆」一詞建議不出現在教學與課本中。
  - 與 1-a-03 的主要差別是，這裡可以不再涉入具體情境，在心理上用比較形式的方式，應用加減互逆來解題或用加法做減法的驗算。
  - 例：「小英有 65 元，想買一個 90 元的布偶，不夠多少元？」這是一個加法形式的問題，藉由加減互逆的理解，知道這個問題可以用減法來算，得  $90 - 65 = 25$ (元)。
  - 例：「小玉買了一個 65 元的熊寶寶後剩下 25 元，小玉原來有多少元？」這是一個減法形式的問題，藉由加減互逆的理解，知道這個問題可以用加法來算，得  $65 + 25 = 90$ (元)
  - 引入下列題型，作為學童練習「加減互逆」的題型。例： $18 + ( ) = 27$ ； $22 - ( ) = 14$ ； $( ) + 12 = 30$ ； $( ) - 25 = 10$ 。學童不瞭解如何解題時，教師可以提供具體的解題情境，讓學童運用在具體情境中的解題方式，但絕對不要採用嘗試法解題，最後必須熟練使用加減互逆的概念來計算( )中的數。
  - 在加減互逆的學習裡，可以依情境引入線段圖的說明方式，讓學生更理解加和減的關係。二年級時，線段圖應只作為教學工具，由於學生還不適合作圖，不宜要求學生自行繪製線段圖。

### 3.三年級細目詮釋

#### 數與量

3-n-01	能認識 10000 以內的數及「千位」的位名，並進行位值單位換算。	N-2-01
--------	-----------------------------------	--------

- 說明：
- 參見 1-n-01，1-n-03，2-n-01。
  - 新增位值單位為「千位」，並認識 1000、100、10 和 1 彼此之間的關係，例如：知道「千」是 10 個「百」。
  - 應認識 1000 元的錢幣，並進行錢幣組合點數及換算的活動(參見 2-n-02)。
  - 能寫出一個四位數的展開式， $2067 = 2000 + 0 + 60 + 7$ 。
  - 能做四位數的大小比較，例：比較 3006、3060 和 3600 三個數的大小。
  - 例：「用 2、5、7 寫出一個三位數，數字不能重複，而且這個三位數要比 700 大。」
  - 例：「用 0、5、7、9 寫成的四位數，數字不能重複，最大的數是多少？最小的數是多少？」
  - 在進行過十(如：從 1327 向上數 4，個位會遇到要進位到十位的問題)、過百(如：從 2498 向上數 3，個位會遇到要進位到十位、百位的問題)、過千(如：從 3998 向上數 3，個位會遇到要進位到十位、百位及千位的問題)的點數活動時，可以採用數線模型來協助點數，此時不宜再點數成千成百的數學積木模型，而要透過數列樣式來學習。
  - 例：位值單位的換算可讓學童進行如 15 個「百」可以換成 1 個「千」5 個「百」，8 個千 2 個百可以換成 7 個千 12 個百的活動。

3-n-02	能熟練加減直式計算(四位數以內，和 < 10000，含多重退位)。	N-2-03
--------	-----------------------------------	--------

- 說明：
- 參見 2-n-04、2-n-05。本細目旨在確認三年級學童應熟練加減直式計算。

3-n-03	能用併式記錄加減兩步驟的問題。	N-2-06 N-2-07
--------	-----------------	------------------

- 說明：
- 算式的橫式書寫習慣、以及將問題的解題方式合併為單一算式的能力，都是日後代數學習的基礎。
  - 此為綱要第一次出現併式之學習，在三年級只處理最簡單的加減兩步驟問題，讓學童學習將兩步驟的算式記為一個加減混合的算式，

並據以計算。

- 學童在二年級時已能將具體情境的問題列成兩個算式，到三年級，開始學習併式，針對題意直接寫出單一算式，並據以解題。

- 例：「小強買了下面三樣東西花了多少錢？寫成連加的算式。」

外套	1299 元
T 恤	250 元
帽子	180 元

- 例：「大賣場有 4500 瓶飲料促銷，上午賣出 1470 瓶，下午賣出 1528 瓶，剩下多少瓶？」
- 例：「一列火車上有 570 人，到站後下去 50 人，上來 319 人，現在火車上有多少人？」
- 例：「張先生身上有 500 元，又到提款機領了 3000 元，請朋友吃飯花了 1250 元，他剩下多少錢？」
- 三年級不處理有括號的問題，教師在布題時應小心迴避這類問題。

<b>3-n-04 能熟練三位數乘以一位數的直式計算。</b>
---------------------------------

<b>N-2-05</b>
---------------

說明： ■ 三年級學習乘法直式計算的程序，由淺入深，順序如下：

(1)在二年級已完成九九乘法，並以橫式、直式記錄。

(2)整十乘以一位數(例如： $30 \times 5$ )、整百乘以一位數(例如： $200 \times 4$ )。

(3)二位數乘以一位數(例如： $32 \times 6$ )，學童應理解其意義( $32 \times 6$  是  $30 \times 6$  與  $2 \times 6$  的和)。

(4)三位數乘以一位數，教師引用(3)的經驗，說明計算的意義與規則即可，讓學童自行熟練。

- 若要做乘數是二或三位數的乘法前置經驗，建議只做下列問題，順序如下：

(1)一位數乘以整十(例如： $3 \times 40$ )。

(2)整十乘以整十(例如： $30 \times 40$ )。

(3)一位數乘以整百(例如： $5 \times 300$ )。

- 有關倍數的問題，有下列幾種題型：

「1 盒冰淇淋的價錢是 1 枝冰棒的 5 倍，2 盒冰淇淋的價錢是 1 枝冰

棒的幾倍？」

「有一棟兩層樓的房子，一樓有小娟身高的 3 倍高，二樓有小娟身高的 2 倍高，這棟房子有小娟身高的幾倍高？」

「大象體重是犀牛的 2 倍，犀牛體重是駱駝的 3 倍，大象是駱駝的幾倍重？」

3-n-05 能理解除法的意義，運用 $\div$ 、 $=$ 做橫式紀錄(包括有餘數的情況)，並解決生活中的問題。

N-2-04

- 說明：
- 以 2-n-07 為前置經驗，在「分裝」與「平分」兩種不同的情境中，理解除法的意義，並知道除式的記法。
  - 理解商與餘數的意義，並能由餘數判斷是否整除，知道餘數要小於除數的約定，以及被除數減餘數後就可以被整除的事實。
  - 知道除式記法中「被除數」、「除數」、「商」的位置，並知道如何記錄「餘數」。例如：記法可為「 $32 \div 6 = 5$  餘 2」或「 $32 \div 6 = 5 \cdots 2$ 」。帶餘數的除法橫式記錄僅為溝通之用，在日後數學學習並不重要，勿過度強調。
  - 初期除法學習的重點是在九九乘法範圍內的心算練習。藉由「分裝」、「平分」的經驗，學生將  $8 \div 2$  是多少，轉換成「 $2 \times$  多少是 8」或「2 的幾倍是 8」的問題，並直接利用九九乘法的經驗來回答問題。這可視為乘除互逆的前置經驗，也是日後除法直式計算中估商的重要前置練習。
  - 教師應避免使用連減法來解決除法問題，初期的「分裝」或「平分」問題可直接在較小數字範圍中操作解題，並引導到如何利用倍數觀念和乘法連結。
  - 關於除法的日常生活問題，要特別小心餘數的處理。例：「要將 20 公升的水，裝到容量 3 公升的水壺，需要幾個水壺才夠？」，這時的答案不是 6 個，而是 7 個，因為剩下的 2 公升的水也需一個水壺來裝。但是如果問題換成「做一個紙星星要用 10 公分的紙條，75 公分的紙條可以做幾個紙星星？」，由於問題強調一個紙星星要用 10 公分的紙條，所以答案是可以做 7 個紙星星，當然學童應注意到還剩下 5 公分的紙條。
  - 連結量與實測之長度測量的活動於除法單元中，如線段問題：把一條長 8 公分的緞帶，每 2 公分剪成一段時，可剪成四段(包含除)。可讓學童用 2 公分做測量單位進行實測來求出答案。亦可以將題目改為：把一條長 8 公分的緞帶，平分給 4 個人，每人可以得到多長的緞帶？(等分除)
  - 要連結「分裝」(包含除)與「平分」(等分除)，可以運用 2-n-06 中的排列模型，本質上是乘法交換律。
  - 在「平分」的情境中，理解「先處理大數，再處理小數」的訣竅，例如： $36$  個平分為 3 份時，可先將 30 個平分成 3 份得 10 個，再將 6 個平分成 3 份得 2 個，所以總共平分得 12 個。這是理解除法直式

計算及分數除法(例： $10 \div 3 = 3\frac{1}{3}$ )的前置經驗。

- 三年級除法教學也應該理解簡單的連續量除法(也可在 3-n-09 或 3-n-11 中進行)。

例(等分除)：「80 公斤的米，平分成 8 袋，每袋有幾公斤？」，學童不只要能計算  $80 \div 8 = 10$ ，也應理解在此情境中平分的意義。

例(包含除)：「80 公升的牛奶，10 公升裝一桶，可以裝幾桶？」，學童不只要能計算  $80 \div 10 = 8$ ，也應理解此問題相當於用 10 公升為單位，去測量全部的牛奶。

- 有關倍數的問題，有下列幾種題型：  
「爸爸今年 36 歲，小強 9 歲，爸爸的年齡是小強的幾倍？」  
「胖哥的腰圍是 130 公分，是他的女朋友腰圍的 2 倍，他的女朋友腰圍是多少公分？」
- 從生活經驗中認識：個數除以 2，如果餘數是 0，稱為偶數；如果餘數是 1，稱為奇數。

3-n-06 能熟練三位數除以一位數的直式計算。
--------------------------

N-2-05
--------

- 說明：
- 學習除法直式計算，以九九乘法的熟練為軸心，熟練估商的技巧(其前置經驗為 2-n-08)。三年級除法直式計算的大致進程如下：
    - (1)在 2-n-08 的九九乘法範圍中，學習兩位數除以一位數的除法直式紀錄方式，這時是可整除的情況。
    - (2)兩位數除以一位數，且商為一位，但有餘數的情形(例： $28 \div 3$ 、 $39 \div 6$ )，熟練運用九九乘法來估商，並能算出餘數。
    - (3)兩位數除以一位數，且商為兩位，但可能有餘數的情形(例： $35 \div 3$ 、 $78 \div 5$ )，知道兩位的商出現的原因(參見 3-n-05「先處理大數，再處理小數」的說明)，並知道如何用九九乘法估商的十位數(不要用分配律來說明)。應讓學童徹底理解這個情況裡，除法直式計算記法的意義。
    - (4)處理被除數為三位的情況，教師不需要每次都討論其意義，但應清楚讓學童知道，整個計算方式只是(3)的延伸。
  - 除法計算對此階段的學童來說較困難，整個除法直式的熟練應到四年級，評量上應多分析學童發生錯誤的原因，不要過於嚴苛。

3-n-07 能在具體情境中，解決兩步驟問題(加、減與除，不含併式)。
-------------------------------------

N-2-06
--------

- 說明：
- 繼續 2-n-10，進行兩步驟的解題，只是多了除法。包括除法的兩步

驟問題，必須特別小心餘數的處理(參見 3-n-05)。

- 例：「小娟用 400 毫升的柳橙汁和 560 毫升的芭樂汁做綜合果汁，再將果汁平分成 6 杯，每杯有多少公升？」，先算綜合果汁有多少毫升，再用總數平分成 6 份，算式是  $400 + 560 = 960$ ， $960 \div 6 = 160$ 。
- 例：「一大桶牛奶 400 公升，用掉了 70 公升後，3 公升裝一瓶，全部裝完需要幾個瓶子？」，先算用去 70 公升的牛奶剩下多少，再算需要幾個瓶子，算式是  $400 - 70 = 330$ ， $330 \div 3 = 110$ 。
- 例：「三兄弟合買一本 399 元的書，每人出一樣多的錢。如果哥哥身上原來有 300 元，買完書後他剩下多少元？」，先算一個人要出多少錢，再將 300 元減去哥哥出的錢，算式是  $399 \div 3 = 133$ ， $300 - 133 = 167$ 。
- 例：「小朋友排隊，每兩位間隔一樣長，第 1 位到第 6 位的小朋友相隔 300 公分，問每兩位小朋友間隔幾公分？」，先算有幾個間隔，再算 1 個間隔有多長，算式是  $6 - 1 = 5$ ， $300 \div 5 = 60$ 。

**3-n-08** 能在具體情境中，解決兩步驟問題(連乘，不含併式)。

**N-2-06**

- 說明：
- 例：「小強家養了一隻花貓和一隻土狗。小強的體重是土狗的 5 倍，土狗的體重是花貓的 2 倍。花貓體重 2 公斤，小強體重幾公斤？」
  - 例：「一盒布丁有 4 個，每 6 盒裝一箱，5 箱共有多少個布丁？」，每箱布丁有  $4 \times 6 = 24$  個布丁，5 箱布丁共有  $24 \times 5 = 120$  個布丁。
  - 例：「以正方體的小積木排一個長方體，直排一排有 8 個，橫排一排有 6 個，高一排有 5 個，共有多少個小積木？」(這是體積公式的前置經驗)
  - 布題時勿超出三年級之乘法計算範圍。

**3-n-09** 能由長度測量的經驗來認識數線，標記整數值與一位小數，並在數線上做大小比較、加、減的操作。

**N-2-14**  
**N-2-15**

- 說明：
- 學童在有了長度測量的經驗或 1-n-03 初期的數序經驗，可在三年級正式引入數線。數線是統整所有數系及幾何的重要基礎，應讓學童學習數線的使用。
  - 數線剛引入時，只是像尺一樣的半線，左邊以 0 為起點，但右邊不做限制。若現場學童對數線還不熟悉時，可以暫時用刻度尺的方式去解釋，但要讓學童意識到數線與一般尺稍有不同，譬如可以把數線想像成一把很長的尺。
  - 但數學教學不必刻意要求每次都出現從刻度 0 開始的數線，當學生理解數線的原理後，便可依教學之目的與方便，截取部分數線來教

學。

- 正式數線和簡易數線的差別是，正式數線要求距離的正確性，這樣才能進行小數的十等分數線教學。數線概念最重要的概念是數與點的對應，例如：數線上的「1」除了代表在數線上的位置是1，也代表與原點的距離是1。
- 整數和小數的數線教學建議分開處理，先學習整數數線，小數部分在小數的數數學習時再做教學。
- 本細目不要求學生自製數線，相關布題皆應先將數線繪製再呈現。
- 日常生活中有許多數線的具體例子，例如：高速公路在連續兩里程碑之間有0.1至0.9的小標示牌等。
- 學生應能理解數線上，愈右邊的數愈大，愈左邊的數愈小。
- 教師也可藉由數數或長度的學習經驗，知道從數線上某數開始，往右走7單位，相當於該數加7；往左走7單位，相當於該數減7。但不用過度教學。
- 在此後不斷學習新的數量時，也要同時強調這些操作教學，讓學童最後能將各種數匯聚到數線上，例如：

「小強的生日是1月14日，今天是1月10日，再過幾天是小強的生日？」配合數線圖示讓學童練習列出算式 $14 - 10 = 4$ 。

「小娟全家人回爺爺家過年，他們從2月6日待到2月11日，他們一共在爺爺家待了幾天？」配合數線圖示讓學生學習列出算式 $11 - 6 = 5$ ， $5 + 1 = 6$ 。

3-n-10 能做簡單的三位數加減估算。	N-2-03
----------------------	--------

- 說明：
- 估算教學請參閱附錄一中「估算」的主題說明。
  - 估算是比較高層次的數學能力，在教學時，首先應確定學童有正確計算的能力，並透過恰當的問題，來訓練學童的估算能力，讓學童在日常應用中，能有判斷的依據。教師不宜在評量時，直接要求標準答案，也切忌認為使用正確計算的學童是錯誤的。評量以利用排除錯誤答案的方式來進行比較恰當(見後例)。
  - 本細目「簡單」的意思只靠近整百的數，如189，611。教師切勿做4-n-06以四捨五入法取概數做估算的教學，避免模糊焦點。
  - 例：「 $302 + 299 = ( )$ 」，下面的3個數中，那一個最接近正確的答案？  
400 500 600」由於302大概是300，299大概是300， $300 + 300$ 的答案大概是600。
  - 例：「 $701 - 599 = ( )$ 」，下面的3個數中，那一個最接近正確的答案？  
100 200 300」由於701大概是700，599大概是600， $700 - 600$

的答案大概是 100。

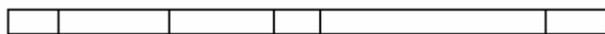
- 教師應認識到，確算不好算或確算沒有必要時，才能彰顯估算的好處。因此在評量時要能據此布題，此激發學生的學習意願，加強學生數感。評量應絕對避免模稜兩可的布題方式。

3-n-11 能在具體情境中，初步認識分數，並解決同分母分數的比較與加減問題。
---

N-2-09 N-2-10
------------------

- 說明：
- 在三年級應初步認識分數的意義，並能理解在日常生活中使用分數的溝通方式。本細目的目標在於，學童從具體情境或活動中掌握分數的概念，能學會分數的記號，並理解運用分數記號來記錄同分母分數的比較與加減的方式。由於本細目在理解分數的意義，建議分母只用小於 12 的數字。
  - 教學上可先強調單位分數的意義，再及於真分數，但本細目的分數並未限制在真分數的範圍內，若教師採行分數的數數教學，則也可自然進行到假分數的範圍，但宜暫時避免「真分數」、「假分數」這些名詞的出現。由於日常生活的分數使用，常常用到小於 1 的分數，因此在三年級可多強調真分數的部分。
  - 本細目中也應處理分數與量的結合。例如：學童在三年級最後應能知道 $\frac{1}{2}$ 公尺、 $\frac{1}{4}$ 公升、 $\frac{3}{10}$ 公斤的意義。
  - 分數教學應儘量利用學童對平分與公平的直覺，在學習上應從最容易的「對分」(一半)、「對分再對分」(四分之一)開始，在這種情況，學童也比較可以操作。原則上，不應將教學時間用在學習等分實際物品的操作上，例如：不要求學童實際將一條繩子平分成 6 份，可透過已經先標記好平分成 6 份的一條繩子，學童依舊可以理解 $\frac{1}{6}$ 。但可加入判別繩子是否等分的教學活動。

例：如下圖，將繩子分成 6 份，請問其中一段是否為 $\frac{1}{6}$ ？請說明其理由。



- 分數教學有兩種常用模型：「圓形模型」(如披薩)與「線形模型」(如繩子、直尺)。前者比較沒有溝通上的干擾，適合教學；後者因為與測量有關，也很重要。兩者皆應發展。
- 單位分數可先從 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{8}$ 等較容易平分的量入手，知道 $\frac{1}{2}$ 個披薩就是

「半個披薩」， $\frac{1}{4}$ 個披薩就是「半個披薩的一半」。然後再學習一般分母的單位分數。

- 學童應學會「二分之一」、「三分之一」、「三分之二」…的說法，並知道「三分之一」個披薩，就是將一個披薩平分成 3 片其中的 1 片，「三分之二」個披薩，就是將一個披薩平分成 3 片，取其中的 2 片。並知道 3 份「三分之一」個披薩合起來是一個披薩。
- 像上述透過披薩學習分數的情境，也可以換成下列情境來學習：  
例：一盒巧克力有 8 顆，平分成 8 份，取其中的 1 顆是「八分之一」盒巧克力，取其中 2 顆是「八分之二」盒巧克力，以此類推，知道「八分之八」盒巧克力就是 1 盒巧克力。像這樣的問題情境，布題時應注意在三年級時只處理平分的份數和巧克力顆數一樣的問題。
- 在學習分數時仍應做數數的活動，讓學生習得分數的量感，如由 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、 $\frac{3}{3}$ 、 $\frac{4}{3}$ 一直數到 $\frac{6}{3}$ 。
- 為了與假分數部分銜接，應在教學中慢慢發展，「2 個 $\frac{1}{3}$ 是 $\frac{2}{3}$ 」、「3 個 $\frac{1}{5}$ 是 $\frac{3}{5}$ 」的語言模式，這個模式也能使學生在學習同分母分數的比較與加減法時，可以與整數的經驗相連結。
- 可由圖形之分割知道同一分數有兩種以上的表示方式(即等值分數之前置經驗，但此名詞不宜出現)。此處之教學不做形式或計算之判別，評量時必須透過圖形來評量。

3-n-12 能認識一位小數，並做比較與加減計算。
---------------------------

N-2-13
--------

- 說明：
- 在處理連續量的脈絡中，連結數與量是理解小數的一種重要方法(例如：使用有公分與毫米之刻度尺、有 10 等分刻度的 1 公升量杯)。小數的數量範圍不需要限制在 1 以內，因為這與測量的情境不符。
  - 新增位值單位為「十分位」，位名的由來是由於 $\frac{1}{10}=0.1$ 的關係。對於一位小數的讀法應注意，10 個 0.1 合起來是 $1.0=\frac{10}{10}=1$ ，而非「零點十」。學生應知道 1 毫米為 0.1 公分，一瓶養樂多的容量(100 毫升)為 0.1 公升。
  - 小數學習時應如同整數做數數的活動，以增進學童對小數的量感，

如 0.5、0.6、0.7、0.8、0.9、1、1.1…等。

- 由於小數和測量情境常一起出現，應多學習「23.4 公分」、「5.7 公升」、「12.1 公斤」的用法。
- 應和 3-n-09 相連結，整合直尺測量經驗與數線上一位小數之紀錄。
- 三年級學童已熟悉整數加減法與乘法直式計算，應學習一位小數(整數兩位)的加減直式計算。重點在熟悉小數點的意義，知道小數點區隔了整數和小數的部分，並理解在小數加減直式計算中要對齊小數點。
- 小數加減問題應儘量和量的問題相結合，此為小數常見的應用問題。

**3-n-13** 能認識時間單位「日」、「時」、「分」、「秒」及其間的關係，並做同單位時間量及時、分複名數的加減計算(不進、退位)。

**N-2-24**

- 說明：
- 藉由二月份日數的不同，區分「平年」、「閏年」，並能利用學過的乘法與加法計算平年與閏年的日數。例如：先用乘法計算 31 天的月份合起來有幾天，再用乘法計算 30 天的月份合起來有幾天，最後和二月的天數全部加起來就是該年的日數。
  - 能認識「1 日=24 時」、「1 時=60 分」及「1 分=60 秒」的關係，但由於學生的除法經驗尚不足，不應問倒過來「時」化「日」、「分」化「時」、「秒」化「分」的問題。
  - 能認識 24 時制，例如：  
例：「小娟在下午 4 時放學，改成 24 時制可以記成幾時？」可以用算式  $12+4$  來算。  
例：「小強在 21 時 30 分上床睡覺，21 時 30 分是下午幾時幾分？」可以先用算式  $21-12=9$  算出下午 9 時，而得知 21 時 30 分是下午 9 時 30 分。
  - 能透過計時 1 分鐘，讓學生嘗試 1 分鐘可以做些什麼事，例如：1 分鐘可以拍手 55 下，可以寫 40 個「分」的國字，1 分鐘可以跑操場一圈…。
  - 由於時間量的計算，牽涉到時間單位的複雜進位(24 進位、60 進位)與數的 10 進位記數系統混合的問題，必須完全仰賴單位的換算，比其他量要困難。因此在三年級時，進行同單位時間量或「時」、「分」複名數之加減計算時，不宜做進位或退位之計算。
  - 例：「小強上午 7 時 40 分出門，7 時 50 分到學校，他從家裡到學校花了幾分鐘？」可以用  $50-40$  來算。
  - 例：「姊姊上午 7 時 40 分出門，8 時到學校，她從家裡到學校花了幾分鐘？」可以將 8 時想成 7 時 60 分，從 40 分到 60 分共有幾分？

可以用  $60-40$  來算。

- 例：「小娟上午 7 時 48 分出門，10 分後到學校，她到學校是上午幾時幾分？」可以用  $48+10$  來算。
- 例：「爸爸上午 8 時 20 分出門，40 分後到公司，爸爸什麼時候到公司？」可以用  $20+40$  來算，得到 60 分，再將 8 時 60 分換成 9 時。
- 例：「小娟的媽媽上午 8 時 40 分到醫院，4 小時候小弟弟出生了，小弟弟什麼時候出生？」
- 例：「小強上午 11 時 20 分到書展會場，2 小時 30 分後離開，他什麼時候離開？」
- 例：「火車上午 10 時 10 分從臺北出發，下午 3 時 30 分到達高雄，火車共開了多久？」
- 例：「電影在開演前 1 小時 30 分賣票，小娟要看下午 8 時 40 分的電影，下午什麼時候開始賣票？」
- 例：「小強要看下午 7 時 30 分的電影，現在離開演還有 3 小時，現在是下午幾時幾分？」
- 例：「小娟的生日是月 14 日，今天是 2 月 10 日，再過幾天是小娟的生日？」
- 例：「小強一家人外出旅遊，從 7 月 3 日至 7 月 17 日，他們不在的這些天，要請送羊奶的廠商停止送羊奶，請問要停送幾天羊奶？」

3-n-14 能認識長度單位「毫米」，及「公尺」、「公分」、「毫米」間的關係，並做相關的實測、估測與計算。
---

N-2-17 N-2-26
------------------

說明： ■ 能認識「1 公分=10 毫米」、「1 公尺=100 公分」、「1 公尺=1000 毫米」的關係，但由於學生的除法經驗尚不足，不應問倒過來「公分」化「公尺」、「毫米」化「公尺」的問題。

- 毫米的引入應與小數教學相互加強。知道 0.1 公分(或 $\frac{1}{10}$ 公分)就是 1 毫米，也應知道「2.1 公分」就是「2 公分 1 毫米」。
- 可在做加減計算時引入複名數的計算方式，但不必發展成嚴格的格式，進、退位只處理「公分」、「毫米」十進位之情形。

「有一根樹枝長 40 公分，一隻蝸牛從樹枝的最左邊向右邊爬了 15 公分 7 毫米，還要爬多遠才會爬到樹枝的最右邊？」

「小強和小娟各吃一枝長 30 公分的糖果棒，小強吃了 7 公分 6 毫米，小娟吃了 6 公分 8 毫米，誰剩下的糖果棒比較長？長多少？」

「小蝌蚪一天長 3 毫米，4 天共長了多少毫米？」

「一顆珠子 8 毫米，將 3 顆紅珠子和 4 顆藍珠子串起來有多長？」

「有一個圓，它的半徑是 5 公分 6 毫米，這個圓的直徑是幾公分幾毫米？」

3-n-15 能認識容量單位「公升」、「毫公升」(簡稱「毫升」)及其關係，並做相關的實測、估測與計算。	N-2-18 N-2-26
---	------------------

- 說明：
- 認識「1 公升 = 1000 毫公升」的關係。並知道日常生活的應用中，「毫公升」也常標記為 ml 與 cc。但由於學生的除法經驗尚不足，不應問倒過來「毫公升」化「公升」的問題。
  - 例：知道養樂多一瓶為 100ml，並操作 10 瓶養樂多為 1 公升的活動。  
理解一瓶養樂多(100ml)的容量是 0.1 公升或  $\frac{1}{10}$  公升。
  - 可在做加減計算時引入複名數的計算方式，但不必發展成嚴格的格式。由於容量的複名數計算，牽涉到公升、毫升單位的進位(1000 進位)與數的 10 進位記數系統混合的問題，三年級在乘、除法經驗不足的情況下，不宜做進位或退位之計算。
  - 例：「媽媽用 1 公升 450 毫升的柳橙汁和 2 公升 450 毫升的芭樂汁做綜合果汁，綜合果汁有多少公升多少毫升？」
  - 例：「量杯裡已經裝了 600 毫升的水，還要加多少毫升的水，才會有 1 公升？」
  - 例：「一桶水有 6 公升，阿姨拖地用了 4 桶水，阿姨共用了多少公升的水來拖地？」
  - 例：「小娟家有 5 人，每人一天大概要用 300 公升的水，小娟家一天大概要用多少公升的水？」
  - 例：「8 公升的沙拉油，平分成 4 瓶，1 個瓶子裝幾公升沙拉油？」

3-n-16 能認識重量單位「公斤」、「公克」及其關係，並做相關的實測、估測與計算。	N-2-19 N-2-26
--	------------------

- 說明：
- 認識「1 公斤 = 1000 公克」的關係。但由於學生的除法經驗尚不足，不應問倒過來「公克」化「公斤」的問題。
  - 可在做加減計算時引入複名數的計算方式，但不必發展成嚴格的格式。由於重量的複名數計算，牽涉到公斤、公克單位的進位(1000 進位)與數的 10 進位記數系統混合的問題，三年級在乘、除法經驗不足的情況下，不宜做進位或退位之計算。
  - 例：「一袋柳丁有 2 公斤 150 公克重，一袋番茄有 1 公斤 450 公克重，兩袋水果合起來有幾公斤幾公克重？」

- 注意分辨「淨重」與「毛重」的差別，名詞不用出現。  
例：「媽媽到市場買了 1 公斤 800 公克的葡萄，裝在 120 公克的紙盒裡，紙盒裝了葡萄後有多重？」  
例：「爸爸的行李箱重 3 公斤 500 公克，裝了衣物後，行李箱重 12 公斤 800 克，裝進去的衣物有多重？」
- 例：「一個哈密瓜重 600 公克，3 個哈密瓜重幾公斤幾公克？」
- 例：「米桶裡有 10 公斤的米，平分裝成 2 袋，每袋裝了多少公斤的米？」

3-n-17 能認識角，並比較角的大小。(同 3-s-04)

N-2-20  
S-2-04

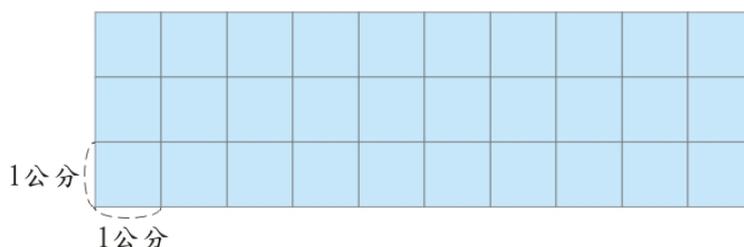
- 說明：
- 能認識角的構成要素為頂點與兩邊，學生能據此畫出一角，並能複製角。
  - 透過直尺、三角板、正方形、長方形認識直角。
  - 能做角的直接比較，尤其要能比較一角和直角之大小。

3-n-18 能認識面積單位「平方公分」，並做相關的實測與計算。(同 3-s-05)

N-2-21  
S-2-02

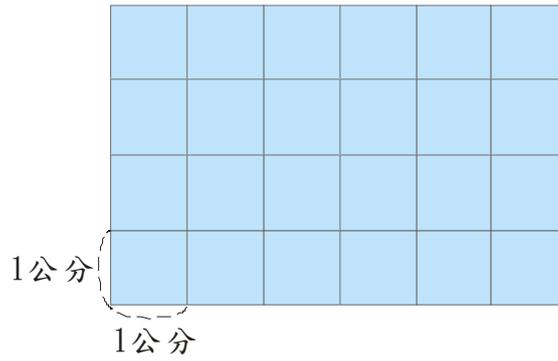
- 說明：
- 透過平方公分板的操作，點數簡易幾何圖形的面積(含正方形、長方形)。
  - 透過圖形拼排的操作，認識簡單三角形的面積，如兩個一樣的等腰直角三角形可合併成一正方形。
  - 能透過乘法計算平方公分板上長方形的面積。

例：「用乘法算算看下圖中長方形有幾個格子？一個格子是 1 平方公分，長方形的面積是多少平方公分？」

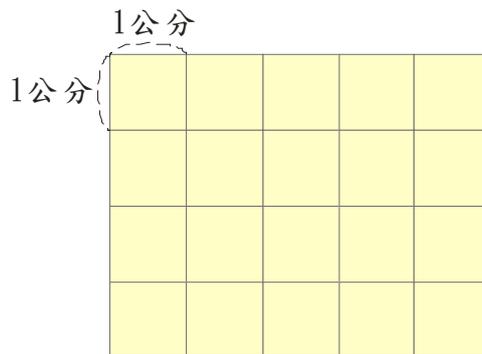


此處不應歸結出長方形面積之公式，僅為其前置經驗。可先提示學童「一列有幾個格子？有幾列？」。

例：「下圖中的長方形兩邊分別是 6 公分和 4 公分，面積是多少？」，可先提示學童「6 公分的這一邊有 6 個格子，表示一列有 6 格；4 公分的這一邊有 4 個格子，表示共有 4 列」。



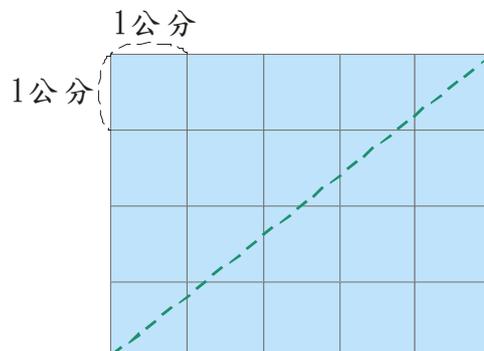
例：「在下面的方格紙上畫出一個面積是 6 平方公分的長方形。」



例：「拿出下圖中的兩個三角形。比比看，這兩個三角形是不是一樣大？將這兩個三角形拼拼看，可以拼成幾種圖形？拼起來的圖形面積是一個三角形面積的幾倍？」



例：「將面積為 20 平方公分的長方形沿著虛線剪開，這兩個三角形的面積各是多少平方公分？寫出算式做做看。」



## 幾何

3-s-01 能認識平面圖形的內部、外部與其周界。

S-2-01

- 說明：
- 以周界(輪廓線)來區分平面圖形的內部、外部，強調平面圖形本身的封閉性質，並讓學童理解周界為該圖形的組成要素。
  - 原則上，只考慮常見的平面圖形。不考慮如「環」狀圖形，也不處理複雜如「螺旋形」的圖形。

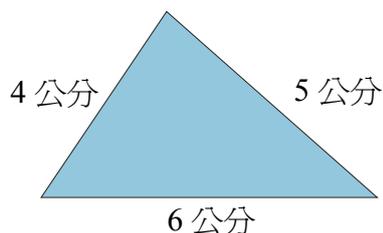
3-s-02 能認識周長，並實測周長。

N-2-17

S-2-01

- 說明：
- 認識周長是平面圖形周界(輪廓線)的長度。這裡強調的是以實測的方式來測量周長，其精確度可到毫米。
  - 實測對象以長方形等的簡單平面圖形為主。
  - 當圖形形狀簡單時，例如：正方形，且其邊長為整數或一位小數時(在三年級的限制下)，也可透過連加或乘法來計算其周長。

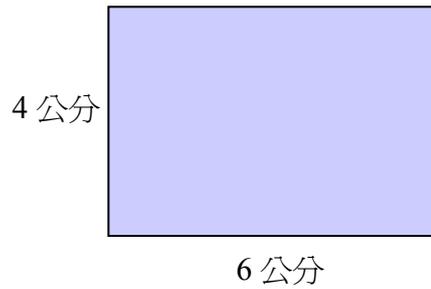
例：「下圖中的三角形各邊分別是 4 公分、5 公分和 6 公分，周長是多少公分？」，可以用  $4+5+6$  來算。



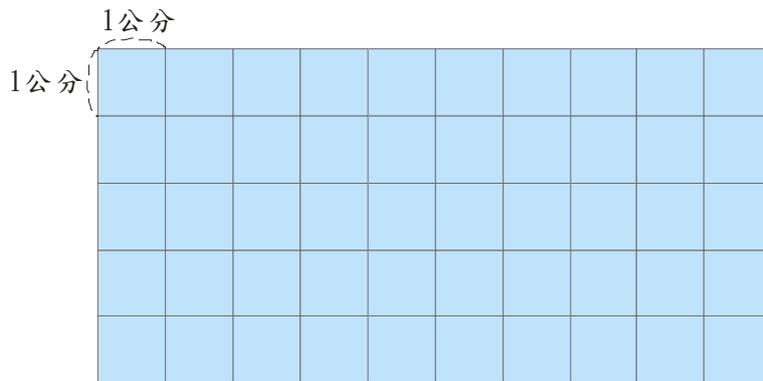
例：「下圖中的正方形一邊長 5 公分，周長是多少公分？」，可以用  $5\times 4$  來算。



例：「下圖中的長方形長邊為 6 公分，寬邊為 4 公分，周長是多少公分？」，可以用  $6\times 2$  和  $4\times 2$  分別算出兩個長邊及兩個寬邊的長度，最後再將兩者相加。



例：「在下面的方格紙上畫出一個長方形，長邊是 8 公分，寬邊是 4 公分。它的周長是幾公分？」



3-s-03	能使用圓規畫圓，認識圓的「圓心」、「圓周」、「半徑」與「直徑」。	S-2-04 S-2-05
--------	----------------------------------	------------------

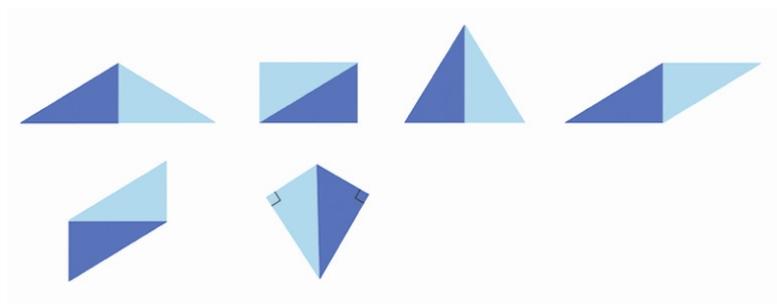
- 說明：
- 認識圓心是圓的中心位置。可以讓學生觀察生活中常見的圓形物體，如：時鐘、鍋蓋、光碟片、腳踏車輪子、汽車方向盤，讓學童能大致辨識出圓心的位置。
  - 圓規的針尖處是「圓心」，筆尖與針尖的距離是「半徑」，旋轉一周所畫出之圖形為「圓」(只考慮此曲線時為「圓周」)。知道圓心與圓周上任一點之距離皆等長(半徑)。若圓周上兩點連線過圓心，則此兩點的距離為「直徑」，是半徑的兩倍。
  - 也可以讓學童理解，利用圓規筆尖與針尖間的距離為單位，來測量線段的長度。

3-s-04 能認識角，並比較角的大小。(同 3-n-17)	N-2-20 S-2-04
--------------------------------	------------------

3-s-05 能認識面積單位「平方公分」，並做相關的實測與計算。(同 3-n-18)	N-2-21 S-2-02
--	------------------

3-s-06 能透過操作，將簡單圖形切割重組成另一已知簡單圖形。	S-2-02
----------------------------------	--------

- 說明：
- 由 1-s-04 的前置經驗，可透過全等操作(平移、翻轉)，將已分割之平面圖形，重組為另一已知的平面圖形。本細目的差別在於，學童必須自己推敲組成的方式。
  - 本細目的另一重點為練習平面圖形的簡單切割，如將一個長方形切割成兩個一樣大的三角形，可以組合成幾種圖形？這可以讓學童同時學習平面的全等操作、面積的保留概念與分數。例如：



- 長方形切割成兩個三角形後，可以再由兩個切割出來的三角形拼回原來的長方形。而兩個三角形的面積亦為原來長方形面積的 $\frac{1}{2}$ 。

3-s-07 能由邊長和角的特性來認識正方形和長方形。	S-2-04
-----------------------------	--------

- 說明：
- 知道四邊相等、且四角為直角的四邊形為正方形，例如：知道斜置之正方形(看起來向菱形)也是正方形。
  - 知道兩對邊相等、且四角為直角的四邊形為長方形。
  - 此為 4-s-01 之前置經驗。。

## 代數

3-a-01 能理解乘除互逆，並運用於驗算及解題。	A-2-01
---------------------------	--------

- 說明：
- 本細目為「檢查細目」，可以併入整數教學單元(或章節)中進行，不一定要另立單元(或章節)教學。「乘除互逆」一詞建議不出現在教學與課本中。
  - 可以用比較形式的方式應用乘除互逆，來做乘除算式的驗算與解題。

- 例：引入下列問題，作為學童練習「乘除互逆」的題型，求出下列各題□中的數：
  - $\times$ 7=28 可以用 28 $\div$ 7 來算。
  - 6 $\times$ □=96 可以用 96 $\div$ 6 來算。
  - 72 $\div$ □=8 可以用 72 $\div$ 8 來算。
  - $\div$ 11=8 可以用 8 $\times$ 11 來算。
- 例：「一包口香糖有 7 片，需要購買幾包才會有 28 片？」的乘法問題，學生可以用除法算式 28 $\div$ 7 來解題。
- 例：「一條繩子平分成 8 段後，每一段長是 10 公分，這條繩子原來有多長？」的除法問題，學生可以用乘法算式 10 $\times$ 8 來解題。

### 統計與機率

3-d-01 能報讀生活中常見的表格。	D-2-01
---------------------	--------

- 說明：
- 表格包含一維表格(如：某電視臺某日之電視節目表、各班人數表、簡易餐廳價格表等)、二維表格(如：功課表、火車時刻表)。若學生之經驗足夠，也可練習報讀較複雜之表格。
  - 推廣行政院消費者保護理念，蒐集相關報導公布的垃圾食品脂肪、鹽和糖的含量，製成表格讓學生報讀。

#### 4.四年級細目詮釋

##### 數與量

4-n-01 能透過位值概念，延伸整數的認識到大數(含「億」、「兆」之位名)，並做位值單位的換算。	N-2-02
---	--------

- 說明：
- 參見 1-n-01，1-n-03，2-n-01，3-n-01。
  - 認識由「個、十、百、千」及「萬、億、兆」所組成的位名，及其形成的計數系統。教師可先處理「萬」、「十萬」、「百萬」、「千萬」的群組，認識位名的關係、讀數與記數的規則，並與過去「個、十、百、千」之經驗相連結，然後再推廣此經驗到「億、兆」的範圍。
  - 進行兩階或跨階單位的換算。例：知道「億」是「千萬」的十倍，「千萬」是「十萬」的一百倍。
  - 例：學童知道 503000000 讀做五億零三百萬，以及能將三百二十萬三千寫做 3203000。
  - 大數的大小比較更要指導學生從高位比起，利用位值表及「個」、「萬」、「億」、「兆」的群組，例如：比較 11608767 和 11349593 的大小，只要比萬位以上的部分，從 1160 萬 > 1134 萬即可比出兩數的大小。

4-n-02 能熟練整數加、減的直式計算。	N-2-03
-----------------------	--------

- 說明：
- 參見 3-n-02。
  - 熟練加、減直式計算，是四年級的重要教學目標。原則上位數不應設限，但也不要過於繁瑣，重點在於不讓學童自我侷限於較小位數的計算，並且有處理大數計算的經驗。
  - 例：也可練習簡單的複名數式的加減法，例如：8 萬 6 千 + 9 萬 7 千、3 萬 4 千 - 9 千、2 億 960 萬 - 1 億 4820 萬的問題。
  - 教學上不宜練習大量高位數的直式計算，大數的處理必須結合概數才有用。

4-n-03 能熟練較大位數的乘除直式計算。	N-2-05
------------------------	--------

- 說明：
- 參見 3-n-02、3-n-04、3-n-06。
  - 原則上乘法以四位數乘以一位數、三位數乘以二位數與二位數乘以三位數為上限，這當然包括比上面更低的所有位數的乘法。
  - 原則上除法以四位數除以一位數、三位數除以二位數為限。
  - 在學習乘法直式計算的進程中，不鼓勵學童用交換律，因為這個捷

徑，對掌握直式計算的算則並無好處。但除此之外，在一般解題與計算中，當然鼓勵學童用自己比較能掌握的方法。

4-n-04	能在具體情境中，解決兩步驟問題，並學習併式的記法與計算。	N-2-06 N-2-07 A-2-02
--------	------------------------------	----------------------------

- 說明：
- 參見 2-n-10，3-n-03，3-n-07，3-n-08。
  - 併式在解題過程雖非必要，但是可作為日後代數學習的前置經驗，並且也可以讓學童理解四則混合計算的應用。在本細目中，應引入括號的使用，並讓學童知道括號中的運算應先計算。
  - 已經學過併式的兩步驟問題有連加、連減、加減混合，尚未學習併式但已經學習過的兩步驟問題是連乘、加乘混合、減乘混合、加除混合、減除混合的兩步驟問題，這是本條細目要處理的重點。至於將兩步驟問題列成連除與乘除混合的併式也在四年級時處理，但不涉及分配律、乘除混合及連除有關的運算性質，相關運算律及性質將在五年級中學習。
  - 例：「紅繩是藍繩的倍長，藍繩是黑繩的 3 倍長，黑繩長 15 公分，紅繩有多長？」，這個問題可併式記為  $15 \times 3 \times 2 = 45 \times 2 = 90$  或  $15 \times (3 \times 2) = 15 \times 6 = 120$  公分。
  - 例：「一打鉛筆有 12 枝，文具店有 3 打黃色鉛筆，7 打粉紅色鉛筆，拆開來放在筆筒裡，共有多少枝鉛筆？」，這個問題可併式記為  $12 \times (3 + 7) = 120$  枝鉛筆。
  - 也要藉此複習「被除數 = 除數  $\times$  商 + 餘數」。例：「有一些餅乾，每 12 塊裝成一包，裝了 5 包，還剩下 10 塊，餅乾原來有幾塊？」，問題的解法可以列成 5 包共有  $12 \times 5 = 60$  塊餅乾，再加上剩下的餅乾  $60 + 10 = 70$  塊餅乾。可併式記為  $(12 \times 5) + 10 = 70$ 。
  - 例：「一桶軟糖有 80 顆，小真每天吃 5 顆，一星期後，還剩下多少顆軟糖？」，問題的解法可以列成一星期共吃  $5 \times 7 = 35$  顆軟糖，80 顆軟糖，吃了 35 顆後還剩下  $80 - 35 = 45$  顆軟糖。可併式記為  $80 - (5 \times 7) = 45$ 。
  - 例：「爸爸買了兩顆西瓜，分別重 8 公斤和 10 公斤，他一共付了 432 元，西瓜 1 公斤賣多少元？」，問題的解法可以列成先算共有幾公斤的西瓜  $8 + 10 = 18$  公斤，再算 1 公斤要多少元  $432 \div 18 = 24$  元。可併式記為  $432 \div (8 + 10) = 24$ 。
  - 例：「36 顆蘋果平分成 3 箱，其中 2 箱送禮，送出去多少顆蘋果？」，問題的解法可以列成每箱  $36 \div 3 = 12$  顆蘋果，2 箱共有  $12 \times 2 = 24$  顆

蘋果。可併式記為 $(36\div 3)\times 2=24$ 。

- 例：「一箱蘋果有 24 顆，將 2 箱蘋果分給 3 個人，每人可分得多少顆蘋果？」，問題的解法可以列成 2 箱蘋果共有  $24\times 2=48$  顆蘋果，再平分給 3 人，每人得  $48\div 3=16$  顆蘋果。可併式記為 $(24\times 2)\div 3=16$ 。
- 例：「48 個布丁，每 3 個布丁裝 1 盒，每 8 盒裝一箱，請問可裝成幾箱？」，問題的解法可以列成 48 個布丁可裝成  $48\div 3=16$  盒，16 盒又可裝成  $16\div 8=2$  箱。可併式記為 $(48\div 3)\div 8=2$ 。
- 例：「72 個蓮霧，平分給 4 個小隊，再平分給小隊的隊員，若每小隊有 6 名隊員，請問 1 個隊員可以分到幾個蓮霧？」，問題的解法可以列成每小隊可得到  $72\div 4=18$  個蓮霧，再平分給 6 個隊員，每個隊員可得  $18\div 6=3$  個蓮霧。可併式記為 $(72\div 4)\div 6=3$ 。

4-n-05 能做整數四則混合計算(兩步驟)。

N-2-07  
A-2-03

- 說明：
- 初步學習整數四則混合計算時，混合計算的約定如下：
    - (1) 有括號時，括號內的運算先進行。
    - (2) 當式子中只有乘除或只有加減的運算時，由左向右逐步進行。
    - (3) 先乘除後加減。
  - 在整數四則混合運算時，除法應能整除。
  - 參看 4-a-02。

4-n-06 能在具體情境中，對大數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減之估算。

N-2-08

- 說明：
- 概數是大概準確的數字，至於此概數是否恰當，則依賴問題的情境。例如：我們可以說臺灣人口約兩千萬人，但是如果我們關心的是今年臺灣人口增加多少時，那麼將去年與今年的人口都說成兩千萬人就是不恰當的。
  - 在指定位數用四捨五入法求概數。
  - 四年級階段只做整數的加減估算，與乘、除有關的估算可在六年級配合小數的教學時再進行(參見 6-n-7)。
  - 例：「臺灣 2007 年 5 月時，男性人口有 11589667 人，女性人口有 11304616 人。先以四捨五入在萬位取概數，再計算臺灣總人口約有多少萬人。」  
 $11589667$  人約為 1159 萬人， $11304616$  人約為 1130 萬人，故臺灣總人口約為  $1159+1130=2289$ (萬人)

說明：

- 理解分數的「整數相除」意涵(例如： $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ 、 $\frac{2}{3} = 2 \div 3$ )，是分數教學的重要課題，日後一般學生也都只記得分數就是分子除以分母的概念。由於本年度開始，學生開始學習假分數與帶分數的互換，因此是學生學習此概念的恰當時機。
- 先複習「單位分數」(參見 3-n-11，這是在平分情境中進行的)，例如：將 1 個披薩，平分給 3 個小朋友，每個小朋友分得  $\frac{1}{3}$  個披薩，因此 1 個披薩  $\div 3 = \frac{1}{3}$  個披薩，簡記成  $1 \div 3 = \frac{1}{3}$ 。
- 討論「如何將 2 個披薩，平分給 3 個小朋友？」，歸結到先將每個披薩各平分成 3 片的方法，再從每個披薩中各取  $\frac{1}{3}$  個披薩，但是  $\frac{1}{3}$  個披薩有 2 片，所以應該是  $\frac{2}{3}$  個披薩，也就是每個小朋友各分得  $\frac{2}{3}$  個披薩，可以讓學童將  $\frac{2}{3}$  個披薩總加起來，確定會得 2 個披薩。



在這裡教師一定要迫使學童處理，這樣平分到底是  $\frac{1}{3}$  還是  $\frac{2}{3}$  的認知衝突(即全體與「個披薩」單位的衝突)。學童必須清楚知道，「2 個披薩的三分之一是  $\frac{2}{3}$  個披薩」。學童在這一點上能突破，才能較穩定理解分數記號的意義。

- 也可以再討論「如何將 4 個披薩，平分給 3 個小朋友？」(引導出帶分數的結果)、「如何將 2 個披薩，平分給 4 個小朋友？」(引導出等值分數)等問題。
- 在具體情境中，讓學童認識有餘數(不准分割之離散量個別單位，如 5 個糖果分給 3 個小朋友)與無餘數(准許分割之連續量個別單位，5 個披薩平分給 3 個小朋友)兩者間的不同，進而清楚理解這兩種情境的差別。

- 利用包含除(分裝)的想法來解釋整數相除時，可以先回顧用測量來理解除法的操作方式，這樣較能理解整數相除的意涵與可能的應用。
- 例：給定一條長繩長度為 35 公分，以一段長度為 4 公分的木條去測量並標記(想成要將長繩剪成 4 公分長的短繩)。由整數計算知 35 除以 4 得到 8(段)，但還剩下 3 公分。3 公分的長度，相當於 4 公分的 $\frac{3}{4}$ ，因此可將剩下的 3 公分的繩子，記成 $\frac{3}{4}$ 段。於是可以將整個測量結果，記成

$$35 \div 4 = 8 + \frac{3}{4}(\text{段}) \text{ 或 } 8 \frac{3}{4}(\text{段})。$$

用假分數與帶分數的互換，檢查這個等式的意義(注意到在測量情境中，真分數、假分數與帶分數結合的方式)。

4-n-08 能認識真分數、假分數與帶分數，熟練假分數與帶分數的互換，並進行同分母分數的比較、加、減與整數倍的計算。	N-2-10
--	--------

- 說明：
- 由本細目，開始發展分數的計算課題，建議分母小於 20，且用較常出現的數，如 2、3、4、5、8、10、12、15、16、20 等。為與小數做連結，也應做分母為 100 的分數。
  - 由於分數本質上是一種乘除關係，因此加減計算比乘除計算複雜，但是在同分母的情形，可以利用單位分數的點數，與整數的計算完全連結，這就是本細目所處理的所有情形。建議教師先在一固定情境中(如平分披薩)，將課題說明清楚並做計算練習後，才開始做其他應用問題(如平分緞帶)。
  - 本細目應處理：
    - (1) 將整數點數與分數記號連結起來(例如：9 個 $\frac{1}{4}$ 就是 $\frac{9}{4}$ )。
    - (2) 說明真分數、假分數、帶分數的意義。
    - (3) 說明假分數與帶分數的轉換，並理解這與分子除以分母的商與餘數的關係。
    - (4) 說明整數的比較與計算如何與同分母的比較與計算連結。
  - 由於同分母分數的比較與加減，與學童的整數經驗完全相同，所以較容易。因此，此細目亦可處理分數的「連加」，也就是整數倍問題。惟學生不宜養成做帶分數的倍數時化為假分數來做的習慣，由於分配律尚未學習，在此進行帶分數的整數倍時，應注意數字不要過大，或等五年級再處理。

- 分數的整數倍，可以用 4-n-07 詮釋說明來舉例：「若每個小朋友有 $\frac{2}{3}$ 個披薩，所以 3 個小朋友(3 倍)共有 $\frac{2}{3}$  個披薩 $\times 3 = 2$  個披薩」。

- 透過分解合成，理解加減互逆也可用於分數加減。
- 理解做帶分數減法時，可能要從整數借 1 的計算原理。並在以 10 為分母時，理解這與小數相減借位的原理相通。
- 本細目與 4-n-07 處理完後，學童應能理解或計算：

$$\frac{16}{30} < 1 < \frac{45}{30}, \frac{16}{30} \text{ 是真分數, } \frac{45}{30} \text{ 是假分數。}$$

$$\frac{17}{25} + \frac{34}{25} = \frac{51}{25} = 2 \frac{1}{25}, \frac{220}{42} - \frac{121}{42} = \frac{99}{42} = 2 \frac{15}{42}。$$

$$\frac{2}{3} \times 3 = 2, \frac{9}{8} \times 3 = \frac{27}{8}。$$

$$21 \div 33 = \frac{21}{33}。(\text{教師指定要寫成分數時})。$$

- 分數的教學應與量做結合。例如：100 公尺 =  $\frac{1}{10}$  公里。

4-n-09 能認識等值分數，進行簡單異分母分數的比較，並用來做簡單分數與小數的互換。	N-2-12 N-2-16
---	------------------

- 說明：
- 等值分數是一般分數加減的基礎，也可當做約分、擴分的前置經驗(參見 5-n-06)。本細目著重等值分數的概念理解，其計算則應透過 5-n-07 來完成。
  - 可先討論「如何將 2 個披薩，平分給 4 個小朋友？」，除了將每個披薩各平分成 4 片的方法之外，教師也要引導學童理解，這問題相當於「如何將 1 個披薩，平分給 2 個小朋友？」。



於是可以得到

$$\frac{2}{4} \text{ 個披薩} = \frac{1}{2} \text{ 個披薩, 簡記成 } \frac{2}{4} = \frac{1}{2}。$$

- 另外學童應該從具體平分情境中，理解可用再細分的方式，得到

$\frac{1}{4}$ 個披薩 =  $\frac{1 \times 2}{4 \times 2} = \frac{2}{8}$ 個披薩。這是擴分的前置經驗，比約分容易操作。

- 在具體的平分情境中(參見 4-n-07)，知道 3 個披薩分給 9 人，相當於 1 個披薩分給 3 個人。因此  $\frac{3}{9} = 3 \div 9 = 1 \div 3 = \frac{1}{3}$ 。其中  $3 \div 9 = 1 \div 3$  的情況，可以當做因數與約分的前置經驗。等值分數的學習與因數、倍數的學習，不應隔得太遠(參見 5-n-04)。
- 由於本細目僅強調「等值分數」概念的理解，因此在處理比較問題時，只處理分母為 2、5、10、100 的分數，這些是比較常用的情形。
- 先複習  $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \dots = 1$  的事實，然後在具體情境中，說明分數等值的理由。可先由分母的倍數差 2、4 倍的分數先出發(因為切半的操作最簡單)。

例如：讓學童理解  $\frac{3}{4}$  與  $\frac{6}{8}$  即為等值分數，並運用等值分數進行簡單異

分母分數(限一分母為另一分母之倍數時)的比較，如： $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} > \frac{5}{8}$ 。

- 分數與小數的互換只做分母為 2、5、10、100 的情況。

4-n-10 能將簡單分數標記在數線上。	N-2-16
----------------------	--------

- 說明：
- 本細目要點之一，是學習在數線上標示分數。讓學生更深刻認識到分數與整數、小數一樣都是「數」，因為都可以標記在數線上。
  - 分數的標示有兩種方式，一種是利用 4-n-09 中的等值分數，來標示分母為 2、5、10 的分數。另一種方法是由分數的基本意義或由 4-n-07 整數相除的教學，知道如何標示出一般的分數(不是透過直式計算)，這時的學習應以如 2、3、4、10 等簡單分母為教學重點。
  - 教學時，要特別讓學生體認到帶分數的整數部分相當於數線上的整數點。

4-n-11 能認識二位小數與百分位的位名，並做比較。	N-2-13
-----------------------------	--------

- 說明：
- 新增位值單位為「百分位」，位名的由來是由於  $\frac{1}{100} = 0.01$  的關係。學童應理解十分位、百分位，如同整數時各個位值間的關係(參見 4-n-01)，如：10 個 0.01 是 0.1 等，並瞭解  $0.23 = 0.1 \times 2 + 0.01 \times 3 = 0.01 \times 23$ 。
  - 要教導學童「小數點以下 2 位」或「二位小數」的講法(這相當於百

分位)，因為小數的位名，除了教學外，很少使用。

- 對於二位小數的讀法應注意，如 0.23 讀成「零點二三」，而非「零點二十三」。
- 例： $0.27 < 0.5$ ，或  $0.3 > 0.29$ (透過分數的轉換，也許比較容易理解)。
- 小數的教學應與量做結合。例如：1 公分=0.01 公尺，100 公尺=0.1 公里。

4-n-12 能用直式處理二位小數加、減與整數倍的計算，並解決生活中的問題。
--

N-2-13
--------

- 說明：
- 本細目的重點，在於讓學童理解這與整數之四則直式計算幾乎相同，其關鍵在小數點位置的處理。
  - 4-n-09 與 4-n-11 中小數之學習應注意和量的結合學習，如「樓層高 3.25 公尺」、「兩地距離 24.56 公里」、「箱子重 5.32 公斤」、等。並在量的情境中做各種比較與計算。

4-n-13 能解決複名數的時間量的計算問題。
-------------------------

N-2-24 N-2-25
------------------

- 說明：
- 本細目之加減計算含「日」、「時」、「分」、「秒」。
  - 例： $2\text{時}35\text{分}=60\text{分}\times 2+35\text{分}=155\text{分}$ 。 $60\text{時}=2\text{日}12\text{時}$ 。
  - 135 分是幾時幾分？ $135\div 60=2\text{餘}15$ ，135 分=2 時 15 分。
  - 2880 分是幾日？ $2880\div 60=48$ ， $48\div 24=2$ ，2880 分=2 日。
  - 例：「小強到公園玩，他先玩直排輪，花了 1 時 45 分，再放風箏玩了 1 時 30 分後才離開公園，他在公園裡玩了多久？」
  - 例：「電影片長 2 小時 15 分，如果已經播了 57 分鐘，還有多久才播完？」
  - 例：「小琪上學出門時間是 7 時 45 分，如果她走路需要花 20 分，請問小琪會不會遲到？」(學校規定 7 點 50 分以前到校)
  - 例：「現在是早上 10 時 30 分，再過多久是午餐時間？再過多久是放學時間？」，這個問題的答案以各校之課表時間為準，教師要協助學生處理經過正午的時間計算問題。
  - 也要做跨日的加減計算。例：「爸爸今天下午 8 時搭飛機從美國回台灣，大概 22 時之後會到達桃園機場，他到達的時間是明天下午幾時？」。
  - 例：「奶奶生病，睡了 23 時，今天上午 8 時才清醒，她是昨天什麼

時候睡的？」。

4-n-14 能以複名數解決量(長度、容量、重量)的計算問題	N-2-17 N-2-18 N-2-19 N-2-25
--------------------------------	--------------------------------------

- 說明：
- 在 3-n-14 已處理「公分、毫米」的複名數計算問題，並利用「1 公分=10 毫米」、「10 毫米=1 公分」做進位和退位的計算。
  - 在 3-n-15 及 3-n-16 已處理「公升和毫升」、「公斤和公克」的不進位和不退位的計算。
  - 本細目強調「公尺和公分」、「公里和公尺」、「公升和毫升」、「公斤和公克」的進位和退位之加、減及乘法計算，這些單位都是 100 : 1 或 1000 : 1 的關係。

4-n-15 能認識長度單位「公里」，及「公里」與其他長度單位的關係，並做相關計算。	N-2-17
--	--------

- 說明：
- 能認識「1 公里=1000 公尺」，所以「1 公里=100000 公分」等。並可與概數的教學單元互相加強(參見 4-n-06)。
  - 例：知道「操場跑 5 圈約為 1 公里」(假設操場一圈約為 200 公尺)。也能計算「操場跑 7 圈約為 1 公里 400 公尺」。
  - 公里不容易直接估測，不需強調，但可討論其它的策略，譬如由經驗知道 1 公里大概相當於學童走 30 分鐘，或大人走 15 分鐘的距離。
  - 教師也可舉當地兩市鎮間的距離為例子。例如：甲鎮到乙鎮的省道長 4 公里 300 公尺，乙鎮到丙鎮之省道長 3 公里 800 公尺，則順著省道由甲鎮到丙鎮，長度為 7 公里 1100 公尺，等於 8 公里 100 公尺。

4-n-16 能認識角度單位「度」，並使用量角器實測角度或畫出指定的角。(同 4-s-04)	N-2-20
--	--------

- 說明：
- 要注意學童以為度數隨角的邊長增加而增加的常犯錯誤(這是與面積混淆所產生的錯誤)。
  - 學童在學習使用量角器時，經常有無法對準中心及角的一邊未對齊 0 度線的問題，教師應仔細檢查。
  - 學童初步熟悉 30 度、45 度、60 度、90 度、120 度、135 度、150 度、180 度的角度即可。
  - 在做角度估測時，不應要求太嚴格。

4-n-17 能認識面積單位「平方公尺」，及「平方公分」、「平方公尺」	N-2-21
-------------------------------------	--------

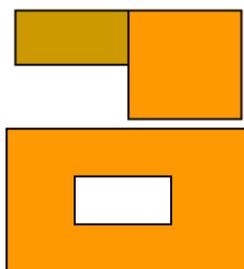
間的關係，並做相關計算。	
--------------	--

說明： ■ 能認識「1 平方公尺 = 10000 平方公分」，但由於學生的除法經驗尚不足，不應問倒過來「平方公分」化「平方公尺」的問題。

4-n-18 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。(同 4-s-09)	N-2-22 S-2-08
--	------------------

說明： ■ 這裡所有長方形與正方形的邊長皆為整數。

- 長方形面積公式 = 長 × 寬，周長 = (長 + 寬) × 2。
- 正方形面積公式 = 邊長 × 邊長，周長 = 邊長 × 4。
- 教師應與學童討論兩面積公式之間的關係。也應討論長方形面積相等，形狀卻不一定相同(因數的前置經驗)；若長方形周長相等，形狀也不一定相同。
- 可讓學童計算由長方形與正方形組成的簡單複合圖形，只處理相接而不相重疊的圖形。如下圖：



4-n-19 能認識體積及體積單位「立方公分」。	N-2-23
--------------------------	--------

說明： ■ 體積的直接比較與間接比較都不容易，除簡單的概念介紹外，操作上宜從規則排列的長方體或正方體入手。例如：用數量一定、形狀及大小相同的積木，堆積成各種可能的長方體或正方體。

- 認識 1 立方公分的積木，用小積木複製某一特定物件，並點數複製時所使用的積木數量。

## 幾何

4-s-01 能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形。	S-2-04
----------------------------------	--------

說明： ■ 小學前三年與後三年的幾何教學定位不同(參見附錄一幾何主題說明)。本細目一方面是針對前階段的檢查性細目，但也是後階段幾何教學的開始。

- 在 2-s-01、2-s-05 中，先在操作觀察中認識給定平面圖形的構成要素。本細目則在強調，由構成要素來刻畫一簡單幾何圖形。在順序

上，前者是先給定圖形，再做實測並認識(例如：正方形在實測中，邊長可能略有誤差)。但本細目，則在強調用構成要素的性質來「刻畫」一理想的幾何圖形(例如：四邊相等且四角為直角的四邊形為正方形)。

- 例：有一個直角的三角形是直角三角形；有四個直角的四邊形是長方形。
- 在國小教學時，由於學生認知心理尚未成熟，因此並不強調正方形是長方形的一種，但這是數學上的重要事實，將從國中開始學習，因此在小學做評量時，切忌詢問「正方形是不是長方形？」這類會導致與日後認知衝突的問題。(※不宜評量)

<b>4-s-02 能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。</b>	<b>S-2-05</b>
---------------------------------------	---------------

- 說明：
- 本細目開始探討基本三角形與四邊形的簡單性質。操作可使用直尺、三角板、量角器、圓規、模型(圖形板的或骨架的)、摺紙、剪裁等。
  - 基本三角形如：正三角形、等腰三角形等，其簡單性質如：正三角形三角相等；等腰三角形兩底角相等。
  - 基本四邊形如：平行四邊形等，其簡單性質如：平行四邊形沿對角線分開之兩三角形全等。

<b>4-s-03 能認識平面圖形全等的意義。</b>	<b>S-2-06</b>
-----------------------------	---------------

- 說明：
- 此為「檢查細目」，可在相關幾何教學中進行，不一定要自成單元(或章節)。
  - 在先前之幾何操作(1-s-04、3-s-06)如平移、旋轉、翻轉中，學童早已開始運用全等的直覺。本細目在將全等的概念定義得更清楚，印證學童的經驗。
  - 簡單平面圖形的全等意指兩平面圖形在疊合時，其頂點、邊、角完全重合。
  - 能以「對應頂點」、「對應角」與「對應邊」的關係來描述三角形全等的意義。
  - 理解平面圖形的性質(參見 4-s-02)，在全等的操作下皆不變。

<b>4-s-04 能認識「度」的角度單位，使用量角器實測角度或畫出指定的角。(同 4-n-16)</b>	<b>N-2-20</b>
---	---------------

4-s-05 能理解旋轉角(包括平角和周角)的意義。	S-2-07
<p>說明：</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ 旋轉角是角度學習的應用，在旋轉時，由始邊轉到終邊構成一個角，因此可應用角度來描述旋轉程度的大小，但因為旋轉有兩個可能的方向(順時針旋轉或逆時針旋轉)，因此描述時，要用順時針旋轉 90 度或逆時針旋轉 120 度的說法才完整。</li> <li>■ 教學時可藉由最常見的鐘面上時針或分針的旋轉，讓學生認識旋轉現象，知道順時針與逆時針的意義，並認識旋轉中心、始邊、終邊與旋轉角的關係。老師之教學重點，在結合原來的角度概念與旋轉現象，而不是將旋轉角當做新的專有名詞來定義。</li> <li>■ 常用之旋轉例子：如「向右轉」通常視為順時針轉 90 度，「向左轉」視為逆時針 90 度，「向後轉」則是轉了 180 度(稱為平角)，且順、逆時針的結果都一樣。也可考慮說明旋轉一整圈是順時針或逆時針轉了 360 度(稱為周角)的結果。</li> </ul>	
4-s-06 能理解平面上直角、垂直與平行的意義。	N-2-20 S-2-03
<p>說明：</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ 能利用三角板來輔助垂直的理解，並由窗格知道，垂直相交的兩線段所成的四角相等(對稱)，都是直角。</li> <li>■ 可由窗格門柵的例子，知道平行線等寬或者說平行線的距離處處相等的事實。並將平行總結為：「兩線(段)同時垂直於某線(段)」(注意本細目只討論平面上的情況)。可進行門寬之實測，結合長度、垂直和平行的關係。</li> <li>■ 在圓平分的例子中，做兩次對半分(即 4 等分)，認識垂直就是 4 等分割時的自然結果，並與分數中的 4 等分相互加強。</li> </ul>	
4-s-07 能認識平行四邊形和梯形。	S-2-02 S-2-03 S-2-04
<p>說明：</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ 平行四邊形為兩組對邊平行的四邊形。</li> <li>■ 梯形為只有一組對邊平行的四邊形。</li> </ul>	
4-s-08 能利用三角板畫出直角與兩平行線段，並用來描繪平面圖形。	S-2-03 S-2-04
<p>說明：</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ 例：學童會使用直尺或三角板畫出直角或兩平行線段，進而用來繪</li> </ul>	

製直角三角形、正方形、長方形、平行四邊形與梯形。

4-s-09 能理解長方形和正方形的面積公式與周長公式。(同 4-n-18)	N-2-22 S-2-08
--	------------------

## 代數

4-a-01 能在具體情境中，理解乘法結合律。	A-2-02
-------------------------	--------

- 說明：
- 本細目為「檢查細目」，可併入整數教學單元(或章節)中進行(參見 4-n-05)，不一定要另立單元(或章節)教學。「乘法結合律」一詞建議不出現在四年級(包括四年級)以前的教學與課本。
  - 乘法結合律，例：學童可以在具體情境中理解，在計算「學期末，每班發給 3 個小朋友學業優良獎，一個年級有 10 班，全校有 6 個年級，共有多少個小朋友可以得到學業優良獎？」之問題時，先計算  $3 \times 10$  得出每個年級得獎人數後，再乘以 6 個年級，可以得到全校的受獎人數，與先計算  $10 \times 6$  得出全校的班級數後，再計算 3 乘以全校的班級數，得出全校的受獎人數之結果都一樣，進而理解  $(3 \times 10) \times 6 = 3 \times (10 \times 6)$  的意義。
  - 乘法結合律，例：以正方體的小積木排一個長方體，直排一排有 8 個，橫排一排有 6 個，高一排有 5 個，讓學童知道有許多不同的方式可以計算總積木數。這裡會用到乘法的結合律與交換律。
  - 單位換算也是自然的連乘與乘法結合律情境。例：知道 2 天有  $60 \times 24 \times 2$  分鐘，且能說明結合律在此例中的意思。
  - 例： $25 \times 11 \times 4 = 25 \times 4 \times 11 = 100 \times 11 = 1100$ 。

4-a-02 能在四則混合計算中，應用數的運算性質。	N-2-07 A-2-01
----------------------------	------------------

- 說明：
- 本細目為「檢查細目」，可併入整數教學單元(或章節)中進行，不一定要另立單元(或章節)教學。
  - 此處數的性質包括加法交換律、結合律，加減混合之計算順序可調換，乘法交換律、結合律。分配律與除法有關之性質則在五年級才學習。
  - 讓學生在實際的計算中，活用運算規律，才能讓學生初步理解運算律之重要性。

4-d-01 能報讀生活中常用的長條圖。	D-2-02
----------------------	--------

- 說明：
- 統計圖的學習分成兩階段，先學習如何報讀已經製作好的統計圖，再學習如何將資料製作成統計圖。「報讀」是指將統計圖上所看到的資料數據檢讀出來。
  - 統計圖表的功能在於藉由圖表，整理雜亂的原始資料，可以簡明的掌握整筆資料的重點。
  - 資料的解讀可與「社會」、「自然與生活科技」等學習領域的教學綜合進行為宜。亦可與社會重要議題結合，例如：人口販運、性交易防制、性別平等、家庭暴力防制、生命教育、環保教育等議題。
  - 下例為一普通的長條圖。

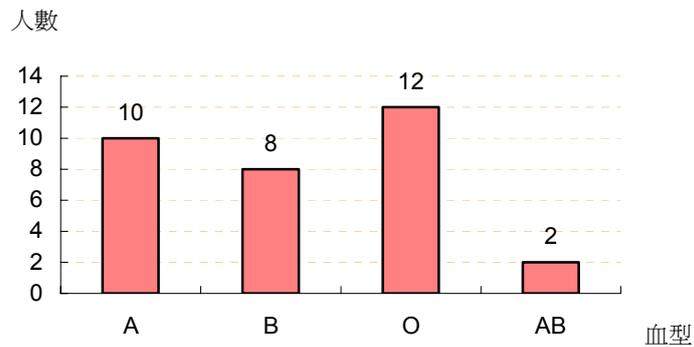


圖 1、班上同學血型長條圖

- 例：各種變形長條圖的樣式：

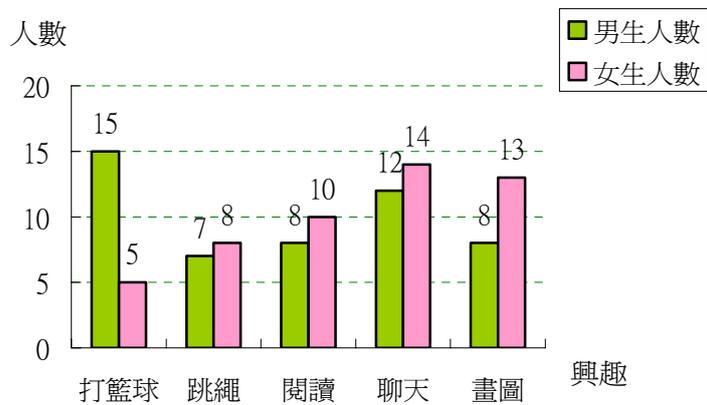


圖 2、依性別之興趣調查長條圖

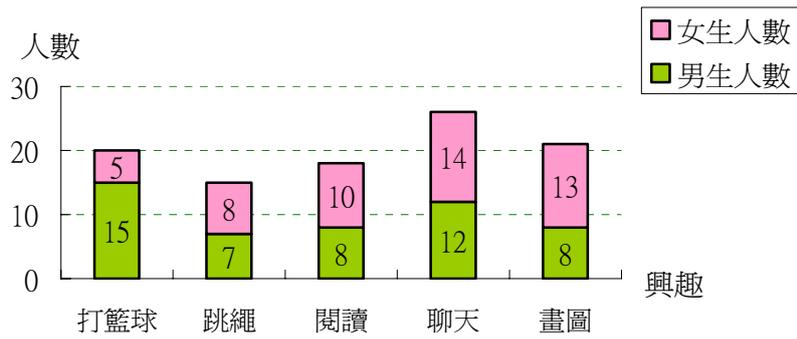


圖 3、依性別之興趣調查長條圖

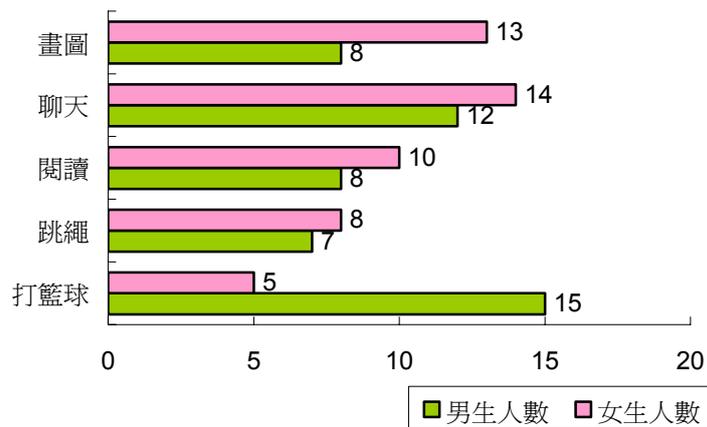


圖 4、依性別之興趣調查長條圖

4-d-02 能報讀生活中常用的折線圖。

D-2-02

- 說明：
- 折線圖一般用於處理有秩序性的資料，其中橫軸為「次序」，例如：座號、序號、時間、大小。
  - 例：圖 5 為爸媽為小強由小學一年級到四年級所記錄的的身高折線圖。

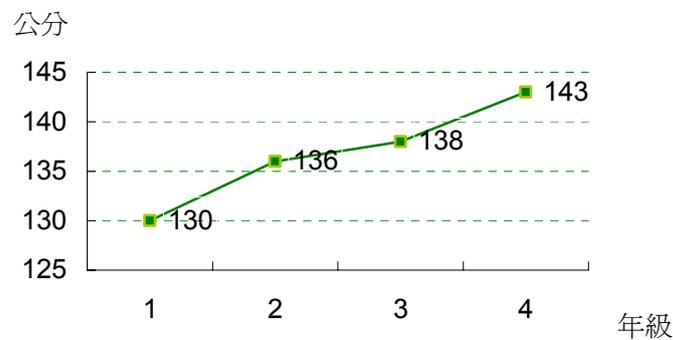


圖 5、小強身高折線圖

## 5.五年級細目詮釋

### 數與量

5-n-01 能熟練整數乘、除的直式計算。	N-3-01
-----------------------	--------

- 說明：
- 五年級是整數直式計算的總結，應熟習乘、除直式計算之一般計算算則，評量上不用處理太多位數的大數，只要學童能熟習四位數乘以三位數、四位數除以三位數之內的計算即可。
  - 應讓學童理解直式計算中，處理「0」的一般方法。
  - 在較大數時，應熟悉如「 $234000 \times 2100$ 」、「 $840000 \div 280$ 」、「 $3200000 \div 2000$ 」等形式之計算問題，這是連結位值、概數與日後科學記號之學習基礎。

5-n-02 能在具體情境中，解決三步驟問題，並能併式計算。	N-3-02 A-3-01
--------------------------------	------------------

- 說明：
- 本細目要求學童能做三步驟應用問題，並儘量以併式的方式思考與演算。這是國中代數學習的重要前置經驗。
  - 例：(平均問題)「三人出外旅遊，共花費旅館費 2200 元、飲食雜費 1800 元、汽油費 500 元，若三人協議分攤旅費，問每人平均分攤多少元？」  
 $(2200 + 1800 + 500) \div 3 = 4500 \div 3 = 1500(\text{元})$
  - 例：(日取其半)「一條繩子的一半的一半的一半是 3 公尺，問原來繩長幾公尺？」

5-n-03 能熟練整數四則混合計算。	N-3-02 A-3-01
---------------------	------------------

- 說明：
- 這是小學對於整數四則混合計算的總結細目，學童應能熟悉各種混合計算的約定；同時希望學童在練習中，能利用整數四則運算的性質來簡化計算，加深學童對四則運算性質的熟悉。
  - 數量範圍雖然可以配合年級而擴大，但應避免過度繁雜又重複的練習。

5-n-04 能理解因數和倍數。	N-3-03
------------------	--------

- 說明：
- 以 1-n-07(幾個一數)，2-n-08(九九乘法)，3-n-05(除法)為前置經驗，理解因數、倍數的概念。
  - 五年級安排本細目與 5-n-05，目標在於協助學童做分數約分、擴分、通分之計算，而非整數內在關係的理論(六年級題材)，因此數字大小

應配合分數之教學(5-n-07)。

- 學生應學習基本的因數判別法，其中 2、5、10 較容易，3 的因數判別法則由教師告知，11 暫不需要教學。

5-n-05 能認識兩數的公因數、公倍數、最大公因數與最小公倍數。	N-3-03
-----------------------------------	--------

- 說明：
- 用列表的方式，尋找兩數的公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數。
  - 學童應知道兩整數的乘積一定是此兩數的公倍數，此可用於分數之通分。
  - 五年級時，只是初步認識這些概念，學生只需用列表解題。短除法算則則在六年級配合因數之短除法一起教學(6-n-02)。

5-n-06 能用約分、擴分處理等值分數的換算。	N-3-06
--------------------------	--------

- 說明：
- 在 4-n-09 的前置經驗中，僅強調等值分數概念的認識。
  - 在本細目教學時，可由平分情境，解釋約分與擴分的意義，然後即應運用因數與倍數來理解約分與擴分，並做等值分數的換算。
  - 例：知道  $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$ ； $\frac{3}{9} = \frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}$  或  $\frac{3}{9} = \frac{3^1}{9_3} = \frac{1}{3}$

5-n-07 能用通分做簡單異分母分數的比較與加減。	N-3-07
----------------------------	--------

- 說明：
- 本細目在小學應以簡單異分母為教學重點，所謂「簡單」係指兩分母滿足以下情況之一(1)分母均為一位數；(2)一分母為另一分母的倍數，且兩數小於 100；(3)乘以 2、3、4、5 就可以找到兩分母之公倍數(例如：兩分母為 12 與 18)。
  - 做一般異分母分數之比較與加減時，必須利用約分或擴分，將兩異分母的分數通分成為兩同分母之等值分數後，再做比較與加減。
  - 本細目只做通分概念的認識，並不要求將結果化成最簡分數(參見 6-n-03)。所以此時學童在做通分時，可能只是做最簡單的分母相乘，但在熟悉的數字時，教師可鼓勵學童儘量將答案約分為較簡單的分數。
  - 教師應注意學童經常發生的錯誤類型：分母與分子各自相加減。

5-n-08 能理解分數乘法的意義，並熟練其計算，解決生活中的問題。	N-3-09
------------------------------------	--------

- 說明：
- 分數計算的課題，不管是從形式練習面著手，還是從情境說明著手，學童都需要經常練習，兩者俱進，才會熟練。

- 本細目在教學上應先處理帶分數乘以整數的問題，此時應用分配律的方式來處理，若直接化成假分數來計算，學生經常因計算複雜而犯錯。
- 本細目的核心是乘數是分數的意義，教學上可先處理整數乘以分數的情況，再處理被乘數為一般分數的情形。理解「分數乘以分數」的方式很多，底下只是一些方法的範例，並不表示教師必須全部教完。
- 在乘數為分數的教學中，最要注意的錯誤類型，是學童認為「乘積一定比被乘數大」，對於這個基於整數計算經驗的錯誤類推，教師需細心處理。最好在最容易理解的「乘數為單位分數」的情況下，就要開始處理。
- 乘數為分數的教學宜先從單位分數開始。3-n-11 中談一數的「幾分之一」是本細目的前置經驗，但不完全相同。「分數倍」的理解比較抽象，可讓學童從已經熟練的直覺與運算上，認識其合理性。
- 例：1 個披薩 300 元，2 個披薩 600 元等，將幾個轉成幾倍來列式，再問「如果兩個人平分 1 個披薩(即各吃 $\frac{1}{2}$ 個披薩)，應該各付多少錢？如果三個人各吃 $\frac{1}{3}$ 個披薩呢？如果五個人各吃 $\frac{1}{5}$ 個披薩呢？」讓學童理解 $\times\frac{1}{2}$ 、 $\times\frac{1}{3}$ 、 $\times\frac{1}{5}$ ，其實就是二等分(除以 2、「的二分之一」、「的一半」)、三等分(除以 3、「的三分之一」)、五等分(除以 5、「的五分之一」)。在此例要小心「元」這個單位不能再分，因此被乘數必須能被整除。
- 與上例類似的連續量例子：從測量情境的分數「整數相除」意涵入手，假設作為測量單位的木條長 5 公分，那麼測量結果，1 段就是 5 公分，2 段就是 10 公分，因此「段」也可以作為倍數來理解，這時問 $\frac{1}{2}$  段應該是多長，顯然就應該是  $5\div 2=\frac{5}{2}$  公分。如此也可以得到一樣的結果。
- 例：由長方形的面積公式入手(只處理乘數是單位分數，參見 4-n-18)。由於邊長是連續量，很適合用在分數與小數的教學，但要注意 4-n-18 的面積公式邊長都是整數。先固定面積公式中的「長」，例如：10 公分，看出當「寬」為 1 與 $\frac{1}{3}$ 的差別是，後者的總面積是前者總面積( $10\times 1=10$ )的三等分，因此應該是  $10\times\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$ ，以此類推。

- 以上處理單位分數倍的方式，可以建立 $\times\frac{1}{2}$ 就是 $\div 2$ ， $\times\frac{1}{3}$ 就是 $\div 3$  的概念。接著，討論乘數分子不為 1 的情況如 $\frac{3}{2}$ 倍的情況，先在上述類似具體情境中(面積中可能要用到等積異形)，理解這其實就是 $\div 2 \times 3$  或 $\times 3 \div 2$ ；或者用測量模型，則 $\times\frac{3}{2}$ 相當於 $\times 1\frac{1}{2}$ (亦即 1 段加半段)。並可由此得到一般分數倍的計算方式： $5 \times \frac{3}{2} = 5 \times 3 \div 2 = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2}$

接著，再說明

$$\frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{4} \times 3 \div 2 = \frac{5 \times 3}{4} \div 2 = \frac{5 \times 3}{4 \times 2} = \frac{15}{8}$$

- 如果要一次完成分數乘以分數，也可以深入探討長方形面積公式。例如：要處理長為 $\frac{3}{2}$ 公分，寬為 $\frac{5}{4}$ 公分的長方形，則可將長方形分割成 15 個長為 $\frac{1}{2}$ 公分，寬為 $\frac{1}{4}$ 公分的小長方形，再將小長方形與邊長 1 公分的正方形比較，知道其面積是 $\frac{1}{8}$ 平方公分，因此總面積為 $\frac{1}{8} \times 15 = \frac{15}{8}$ 平方公分。

5-n-09 能理解除數為整數的分數除法的意義，並解決生活中的問題。	N-3-10
------------------------------------	--------

- 說明：
- 此為 6-n-04 之前置經驗。
  - 由分數乘法的意義，很容易就可以進行除數為整數之教學(以平分的模型來教學)。
  - 例： $3\frac{1}{2}$ 披薩要平分給 4 個人，因此每人分得全部  $3\frac{1}{2}$ 披薩的 $\frac{1}{4}$ ，因此依照算式記錄可知：

$$3\frac{1}{2} \div 4 = \frac{7}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{8}$$

- 學童最後要熟知「 $\div m$ 」相當於「 $\times\frac{1}{m}$ 」之事實，並能熟練計算。
- 分裝情形的除法意義與應用問題，宜等到六年級才與 6-n-04 一起進行。

5-n-10 能認識多位小數，並做比較與加、減與整數倍的計算，以及解決生活中的問題。	N-3-08
--	--------

- 說明：
- 所謂多位小數，只是讓學童知道小數的位數，原則上跟大數一樣，可以一再細分下去，而不特別自限於固定的位值限制即可。實際教學時，則以三位小數和四位小數為教學與評量重點。
  - 要教導學童「小數點以下(後)第 3、4 位」的講法。
  - 在進行多位小數教學時，要同時將已知關於小數的直式計算加以延伸，讓學童理解多位小數的計算，與小位數小數的計算方式相同。
  - 知道怎麼將多位小數化為分數，讓學生理解這兩種表示法的內在關係(約分非此處重點)。
  - 教師也不妨引用自然科學的實際例子，讓學童知道在微小的世界中，小數派的上用場，例如：細菌大概是 0.0003 公分長，更小的病毒，大概 0.00001 公分長。如果細菌像 10 元硬幣那麼大，那麼小朋友就跟珠穆朗瑪峰(聖母峰)一樣高。

5-n-11 能用直式處理乘數是小數的計算，並解決生活中的問題。	N-3-09 N-3-11
----------------------------------	------------------

- 說明：
- 此細目與 5-n-08 有關，兩者都必須先理解乘數是分數或小數時的意義。
  - 先處理整數的小數倍的計算方式。乘數可先從 0.1 與 0.01 著手，知道其結果相當於移動小數點的位置(若已先處理乘以 $\frac{1}{10}$ 或 $\frac{1}{100}$ 的情形與 5-n-12，則此處為顯然)。其次，再考慮例如：乘數為 0.2(= $\frac{2}{10}$ )，或乘數為 1.2(= $\frac{12}{10}$ )的情形。最後再討論被乘數是小數的情形。
  - 本細目教學之最後階段，以兩位小數的互乘為原則，多位小數則作為展示小數點如何處理的範例。
  - 評量要點為學生能確實理解小數乘法與整數乘法直式計算的異同。

5-n-12 能用直式處理整數除以整數，商為三位小數的計算。	N-3-11 N-3-13
--------------------------------	------------------

- 說明：
- 在 4-n-06 中已知整數除以整數可以表示為分數，4-n-08 中知道某些分數可以化為小數。本細目以前兩者為基礎，學習如何透過直式計算，將整數除以整數的計算直接表為小數，其商限定為三位小數。
  - 學生應熟悉分母為 2、4、5、8、10、100 之真分數所對應的小數值，

並應用於一般假分數情況之計算。

- 布題應小心情境之合理性，讓學生能理解不求餘數，而繼續往下計算的理由。
- 關於出現循環小數的問題，將在六年級處理(6-n-06)，教師評量時，應小心布題。

<b>5-n-13</b> 能將分數、小數標記在數線上。	<b>N-3-11</b> <b>N-3-13</b>
------------------------------	--------------------------------

- 說明：
- 本細目要點之一，是學習自行製作數線，標示整數、分數、小數。
  - 小數的標示以一位為原則。
  - 分數的標示應以如 2、3、4、10 等簡單分母為教學重點。

- 說明：
- 「比率」是分數課題之一。初步學習的情境強調的是部分佔全體的多寡與其表示法，因此比率的值往往小於或等於 1，且 1 就是「全部」。
  - 當學生認識到可以 1 作為基準量時，則也可以學習大於 1 的比率。日常生活中的加成，如服務費加兩成；犯罪成長率 120%；投資報酬率、銀行存款利率等也是比率的例子。
  - 五年級階段，只處理部分量與全部量為整數或可恰當轉化為整數量的情形。例如：「100 個人中有 75 人及格」，所以及格人數的比率是  $\frac{75}{100}=0.75$ 。而不及格人數的比率是  $1-0.75=0.25$ 。
  - 也要能處理，由全部量與比率推得部分量的問題，例如：「全校 500 名學童，其中的  $\frac{53}{100}$  是女生，請問女生有多少人？」，答案是  $500 \times \frac{53}{100} = 265$ 。
  - 部分量與所佔比率已知，推得全部量的問題則到六年級分數除法時再處理(參見 6-n-04，6-n-06)。
  - 百分率是最常用的比率表示法，學童應理解其意義、記法與應用，知道 100% 就是 1，也就是全部。例：知道  $\frac{75}{100}=0.75$ ，可記成 75%。知道這次考試有 75% 的同學及格，則不及格的同學佔全班 25%，知道這相當於計算  $1-75%=100%-75%=25%$ 。
  - 例：「500 人的 75% 是多少人？」，「若全校有 500 人，女生有 275 人，則男生佔全校人數的百分之多少？」。
  - 熟練常用的百分率與分數轉換，如：100%=1 (全部)，50%= $\frac{1}{2}$  (一半)，25%= $\frac{1}{4}$ ，75%= $\frac{3}{4}$ ，20%= $\frac{1}{5}$ ，40%= $\frac{2}{5}$ ，60%= $\frac{3}{5}$ ，80%= $\frac{4}{5}$ ，10%= $\frac{1}{10}$
  - 「折」的日常用法要熟悉並能計算。知道「書店全面七五折」的意思相當於以定價的 75% 計價，若買 600 元的書，只要付  $600 \times \frac{3}{4} = 450$  元。學童應理解這樣省了  $1-75%=25%$ 。另外要注意「七五折」不是「七十五折」。
  - 要處理全體中有多少子類的情況，可與統計機率的細目一起處理(參

見 6-d-01)。

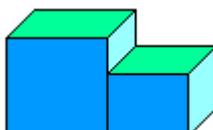
<b>5-n-15</b> 能解決時間的乘除計算問題。	<b>N-3-19</b>
<p>說明：</p> <ul style="list-style-type: none"><li>■ 本細目的單位換算與計算限於整數範圍。</li><li>■ 例：如果知道練習彈奏一首鋼琴曲要 5 分 30 秒，連續彈奏三次需要多少時間？</li><li>■ 例：連續播放一首歌曲五遍共需 31 分 15 秒，只播放一遍需要多少時間？</li><li>■ 例：做一個捏麵人要花 2 分 30 秒，1 小時可以做幾個？</li></ul>	
<b>5-n-16</b> 能認識重量單位「公噸」及「公噸」、「公斤」間的關係，並做相關計算。	<b>N-3-19</b>
<p>說明：</p> <ul style="list-style-type: none"><li>■ 1 公噸 = 1000 公斤</li><li>■ 本細目的單位換算與計算可引入分數或小數(但需在本年度之學習範圍內)。</li></ul>	
<b>5-n-17</b> 能認識面積單位「公畝」、「公頃」、「平方公里」及其關係，並做相關計算。(同 5-s-05)	<b>N-3-19</b>
<p>說明：</p> <ul style="list-style-type: none"><li>■ 1 公畝 = 100 平方公尺；1 公頃 = 100 公畝；1 平方公里 = 1000000 平方公尺。</li><li>■ 本細目的計算可引入分數或小數，但由於學生對於多位小數尚不熟悉，教師可以告訴學生 1 平方公尺為 <math>\frac{1}{1000000}</math> 或 0.000001 平方公里，但勿再過度要求，尤其不要做反方向的換算。</li><li>■ 例：1 平方公里 = 10000 公畝 = 100 公頃</li><li>■ 例：「若某正方形區域之公園，面積為 1 公畝，請問其邊長為多少公尺？」</li></ul>	
<b>5-n-18</b> 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(同 5-s-05)	<b>N-3-22</b> <b>S-3-06</b>
<p>說明：</p> <ul style="list-style-type: none"><li>■ 從長方形面積出發，以 3-s-06 為前置經驗，運用切割重組與簡單幾何圖形的性質，來推導這些圖形的面積。</li><li>■ 三角形面積公式 = (底×高)÷2 平行四邊形面積公式 = 底×高 梯形面積公式 = (上底 + 下底) ×高÷2</li></ul>	

5-n-19 能認識體積單位「立方公尺」，及「立方公分」、「立方公尺」間的關係，並做相關計算。	N-3-19
---	--------

- 說明：
- 1 立方公尺 = 1000000 立方公分
  - 本細目的計算可引入分數或小數，但由於學生對於多位小數尚不熟悉，教師可以告訴學生 1 立方公分為  $\frac{1}{1000000}$  或 0.000001 立方公尺，但勿再過度要求，尤其不要做反方向的換算。

5-n-20 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。(同 5-s-07)	N-3-20 N-3-25 S-3-05 S-3-11
---	--------------------------------------

- 說明：
- 長方體體積公式 = 長 × 寬 × 高
  - 正方體體積公式 = 邊長 × 邊長 × 邊長
  - 應能理解長方體和正方體表面積的計算方法，這裡不強調表面積的公式，學童能合理求出表面積即可。
  - 教師與學童可討論長方體與正方體兩體積公式間的關係。
  - 可讓學童計算由長方體與正方體組成的簡單複合圖形，只處理相接而不相內嵌的圖形。如右圖：



5-n-21 能理解容量、容積和體積間的關係。	N-3-21
-------------------------	--------

- 說明：
- 容量、容積與體積均為空間大小的量。一般說來，體積代表實體佔有的空間，容量、容積代表的是實體內可負載的量，其區別如下：
    - 體積：物體所佔空間的大小。
    - 容積：某一具有確定三度空間的周界內的空間大小，通常此空間有容納物質可以隨時存取的功能。換言之，容積是指容器內部空間的大小，其概念是體積概念。例如：冰箱內部的容積。
    - 液量：指容器內液體的量。如：水量。
    - 容量：指容器可裝載的最大液量。
  - 「容積」概念的引入：可從容器內部空間的形狀和大小開始討論，引導用多少個 1 立方公分積木才能填滿，才由教師宣告盒子內部空間的體積就是這個盒子的容積。
  - 「容積」、「容量」的關係：可聯絡舊經驗，例如：盒子的容積是多

少？同一個盒子的容量是多少？再由教師配合活動操作的結果宣告 1 公升的水所佔的空間是 1000 立方公分；讓兒童瞭解水所佔空間的體積是多少，進一步才討論容器內部空間不是長方體時，可由容量推算容積。

- 當兒童認識水也有體積之後，便可以討論「沉入水中的物體的體積，等於此物體所排開的水的水量，也就是水所佔空間的體積」。
- 1 立方公分 = 1c.c.。

## 幾何

5-s-01 能透過操作，理解三角形三內角和為 180 度。	S-3-02
說明： <ul style="list-style-type: none"><li>■ 先嘗試測量不同形狀的三角形。認識許多三角形的三內角和為 180 度。</li><li>■ 以剪裁拼貼的方法，讓學生稍微理解內角和都等於 180 度的理由。</li><li>■ 知道正三角形的三內角都是 60 度。知道常用兩種三角板的三內角為 45-45-90 度與 30-60-90 度。</li><li>■ 「內角」一詞不必在課文中出現。</li></ul>	
5-s-02 能透過操作，理解三角形任意兩邊和大於第三邊。	S-3-02
說明： <ul style="list-style-type: none"><li>■ 嘗試測量不同形狀的三角形，歸納出結果。</li><li>■ 如果學童理解兩點間的線段長度是最短距離，也可以用推理知道為什麼這個性質是正確的。(※討論活動題，不宜評量)</li></ul>	
5-s-03 能認識圓心角，並認識扇形。	S-3-01
說明： <ul style="list-style-type: none"><li>■ 先認識圓心角與扇形的意義，知道圓心角的大小和扇形的大小是不同的概念。</li><li>■ 能將圓心角與圓形模型之分數相結合，知道半圓之圓心角為 180 度、<math>\frac{1}{4}</math>圓的圓心角是直角 90 度、<math>\frac{1}{8}</math>圓的圓心角是 45 度、<math>\frac{1}{3}</math>圓的圓心角是 120 度，<math>\frac{1}{6}</math>圓的圓心角是 60 度等。</li><li>■ 也可透過圓心角與旋轉角的結合，再認識 180 度與 360 度的意義。(參見 4-s-05)</li></ul>	
5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線對稱性質。	S-3-03

- 說明：
- 能在具體示例中判斷一圖形是否為線對稱圖形，並能找出該圖形的對稱軸(可能不只一條)。
  - 知道具有對稱性的常見平面圖形：等腰三角形、長方形、正方形、菱形、正多邊形(至少正五邊形與正六邊形)、圓。
  - 能指認一點之對稱點，並知道線對稱圖形的對應邊相等、對應角相等，並知道對稱軸兩側圖形全等(不需要證明)。
  - 知道如何描繪一平面圖形對一對稱軸的線對稱圖形。

5-s-05 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(同 5-n-18)	N-3-22 S-3-06
---	------------------

5-s-06 能認識球、直圓柱、直圓錐、直角柱與正角錐。	S-3-09
------------------------------	--------

- 說明：
- 本細目之目標，在於以平面圖形之知識，初步認識常見立體圖形之幾何結構，瞭解立體圖形表面之意義。教學應以活動操作為主，且不牽涉量的計算。
  - 球為常見的立體圖形，學生僅需認識球有球心、過球心之各截面為半徑相同的圓，並理解球半徑的意義即可。
  - 除了球之外，在小學階段，立體圖形只需認識最自然的直圓柱、直圓錐、直角柱與正角錐的教學，「直」、「正」一詞皆不需在教學時出現。
  - 可由實際生活中之屋柱，認識直圓柱和直角柱的基本意義。並由展開圖或剪貼之操作，認識圖形之基本構成要素。例如：將長方形捲曲再加上全等兩圓，可構成直圓柱；兩全等多邊形與適當之諸長方形可構成直角柱。
  - 在直圓錐與正角錐的學習中，認識到圖形是由底邊之正多邊形或圓，與其「中心」上方一點所構成。由展開圖或剪貼知道，由底圓與適當之扇形可構成直圓錐；由底正多邊形與適當之諸等腰三角形可構成正角錐。
  - 展開圖在此僅作為活動操作之工具，藉以讓學生初步認識各構成要素如何構造出立體圖形，不應作為紙筆評量之題材(此為國中之範圍)。

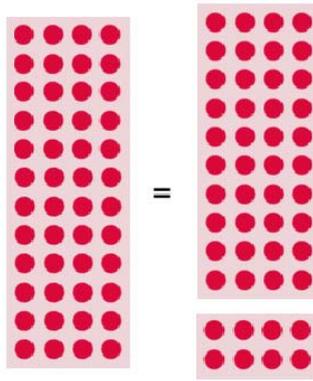
5-s-07 能理解長方體和正方體體積的計算公式，並能求出長方體和正方體的表面積。(同 5-n-20)	N-3-20 N-3-25 S-3-05 S-3-11
---	--------------------------------------

## 代數

5-a-01	能在具體情境中，理解乘法對加法的分配律，並運用於簡化計算。	N-3-02 A-3-01
--------	-------------------------------	------------------

說明： ■ 本細目為「檢查細目」，可以併入整數教學單元(或章節)中進行(參見 5-n-02, 5-n-03)，不一定要另立單元教學。「分配律」一詞建議不出現在教學與課本中。

- 解釋乘法直式計算時，會用到分配律，學童可以從錢幣的情境來理解，也可以透過乘法的「排列模型」來理解。如下圖： $4 \times 12 = 4 \times 10 + 4 \times 2$



- 也可透過下面的例子來理解，例：「一打鉛筆有 12 枝，文具店有 3 打黃色鉛筆，7 打粉紅色鉛筆，拆開來放在筆筒裡，共有多少枝鉛筆？」，這個問題可以分開成黃色鉛筆  $12 \times 3 = 36$  枝，粉紅色鉛筆  $12 \times 7 = 84$  枝，總共有  $36 + 84 = 120$  枝來計算，也可以先算有  $3 + 7 = 10$  打鉛筆，再算共有  $12 \times 10 = 120$  枝鉛筆。所以  $12 \times (3 + 7) = 12 \times 3 + 12 \times 7$
- 例：「一束花中有 10 朵玫瑰、12 朵康乃馨，7 束花總共有多少朵花？」，這個問題可以分開成 7 束花有  $10 \times 7 = 70$  朵玫瑰， $12 \times 7 = 84$  朵康乃馨，合起來共有 154 朵花；也可以先算每束有  $10 + 12 = 22$  朵花，再算總共有  $22 \times 7 = 154$  朵花。所以  $(10 + 12) \times 7 = 10 \times 7 + 12 \times 7$
- 解釋帶分數乘以整數的計算時，會用到分配律，如：

$$3\frac{1}{2} \times 3 = 3 \times 3 + \frac{1}{2} \times 3 = 9 + \frac{3}{2} = 10\frac{1}{2}$$

5-a-02	能在具體情境中，理解先乘再除與先除再乘的結果相同，也理解連除兩數相當於除以此兩數之積。	A-3-01
--------	---	--------

說明： ■ 本細目為「檢查細目」，可以併入整數教學單元(或章節)中進行(參見 5-n-02, 5-n-03)，不一定要另立單元(或章節)教學。注意到這裡的除

法都必須整除。

- 例：「一盒糖有 15 顆，7 盒糖平分給 5 人，一人分到多少顆糖？」，這個問題可以先算有多少顆糖( $15 \times 7 = 105$ )，再算一人分到多少顆( $105 \div 5 = 21$ )；也可以先將一盒糖分給 5 人(每人  $15 \div 5 = 3$  顆)，再看 7 盒糖一人分到多少顆( $3 \times 7 = 21$ )。併式紀錄呈現： $15 \times 7 \div 5 = 15 \div 5 \times 7$ ，可討論後者的計算較容易。
- 先乘再除相當於先除再乘，也可以運用 2-n-06 中之乘法「排列」模型來理解(圖例： $6 \times 3 \div 2 = 6 \div 2 \times 3$ )。



- 續 4-n-04 例：「48 個布丁，每 3 個布丁裝 1 盒，每 8 盒裝一箱，請問可裝成幾箱？」。學童應理解，這相當於先計算每箱可裝  $3 \times 8 = 24$  個布丁，所以  $48 \div 3 \div 8 = 48 \div (3 \times 8) = 48 \div 24 = 2$
- 續 4-n-04 例：「72 個蓮霧，平分給 4 個小隊，再平分給小隊的隊員，若每小隊有 6 名隊員，請問 1 個隊員可以分到幾個蓮霧？」。學童應理解，這相當於先計算總共有  $6 \times 4 = 24$  個隊員，所以  $72 \div 4 \div 6 = 72 \div (4 \times 6) = 72 \div 24 = 3$
- 例： $60 \times 32 \div 12 = 60 \div 12 \times 32 = 5 \times 32 = 160$
- 在本年級處理此細目時，應完全在整數的限制中處理。分數或小數將在六年級才進行(6-n-05, 6-n-08)。

**5-a-03** 能熟練運用四則運算的性質，做整數四則混合計算。

N-3-02  
A-3-01

- 說明：
- 四則運算的性質指加法與乘法的交換律、結合律，乘法對加法的分配律 5-a-01 以及 5-a-02 之運算性質。
  - 併式時的約定參見 4-n-04, 4-n-05。

**5-a-04** 能將整數單步驟的具體情境問題列成含有未知數符號的算式，並能解釋算式、求解及驗算。

A-3-04  
A-3-05

- 說明：
- 在「加減互逆」(2-a-04)和「乘除互逆」(3-a-01)的細目中，已經處理過有空格的單步驟計算題。因此本細目的要點在於，學童能夠從問題中分析題意，以未知數表示的未知量，並列出正確的算式。由於這對學童而言是全新的學習，因此問題限制在最簡單的單步驟問題。
  - 學童可以用  $\Delta$ 、 $\square$ 、甲、乙、 $x$ 、 $y$ ...來代表未知數，不過基於與國中代數連結的考慮，若學童使用英文單字沒有問題，應盡量考慮

使用  $x$  和  $y$ 。

- 例如：「小明原有 8 張怪獸卡，又獲得幾張怪獸卡之後，總共有 13 張怪獸卡？」，學童將題目列成  $8 + x = 13$  後，由加減互逆運算，知  $x$  的答案等於  $13 - 8 = 5$ 。
- 例如：一包口香糖有 7 片，需要購買幾包才會有 28 片的的乘法問題，學童將題目列成  $7 \times x = 28$  後，透過乘除互逆，得知  $x$  的答案等於  $28 \div 7 = 4$ 。
- 單步驟指的是未知數之計算步驟為單步驟，如下例：

$$8 + x = 13, \quad x + 5 = 16;$$

$$x - 10 = 10, \quad 20 - x = 15;$$

$$7 \times x = 28, \quad x \times 5 = 20;$$

$$x \div 9 = 63, \quad 40 \div x = 5$$

## 6.六年級細目詮釋

### 數與量

6-n-01 能認識質數、合數，並用短除法做質因數的分解（質數 $<20$ ，質因數 $<20$ ，被分解數 $<100$ ）。	N-3-04
--	--------

- 說明：
- 在 5-n-04，製作整數的因數表時，可以發現有一些整數不能再被分解，這些數稱為質數，他們的因數只有 1 與自己而已。大於 1 且不是質數的整數(或有 3 個以上因數的整數)稱為合數。
  - 在對一數做因數分解的練習裡，發現遇到質數就必須停下來。同時在記錄分解的樣式及整理中，發現不管怎麼分解，形式都一樣(見下例)。在小學時，質因數分解的乘積不寫成指數形式
  - 例： $60=6\times 10=(2\times 3)\times(2\times 5)=2\times 2\times 3\times 5$ ，或  
 $60=15\times 4=(3\times 5)\times(2\times 2)=2\times 2\times 3\times 5$
  - 牽涉因數分解的細目(參見 6-n-02)，都應遵循如下原則：質因數 $<20$ ，被分解數 $<100$ 。
  - 學童應熟悉 2、3、5、7、11、13、17、19 在 100 以內的倍數。
  - 最後，將上述經驗整合為常用的短除法算則。可以要求學童將最後的分解由小到大排列，但使用短除法時則不應對順序設限。

6-n-02 能用短除法求兩數的最大公因數、最小公倍數。	N-3-05
------------------------------	--------

- 說明：
- 最大公因數、最小公倍數的初步教學，以列舉觀察為主，熟悉其意義(5-n-05)。本細目則更進一步以 6-n-01 求質因數的短除法經驗，發展以短除法計算兩數最大公因數與最小公倍數的方法，數目大小原則參見 6-n-01。
  - 學童應在過程中觀察到互質的意義(6-n-03)。
  - 小學只處理兩個數的最大公因數和最小公倍數。

6-n-03 能認識兩數互質的意義，並將分數約成最簡分數。	N-3-05
-------------------------------	--------

- 說明：
- 兩數的最大公因數是 1 稱為互質。注意區辨互質與質數的不同。例如：14 與 15 雖然都是合數，但兩者互質。
  - 知道透過約分，可以將分數化成分子和分母互質的分數，稱為最簡分數。
  - 在六年級容許的因倍數範圍中，應要求學童將分數化為最簡分數。

- 說明：
- 分數除以整數已在五年級(5-n-09)處理，本細目的核心是除數是分數的意義。可先處理整數除以分數的情況，最後處理被除數為一般分數的情形。
  - 分數計算的課題，不管是從形式練習面著手，還是從情境說明著手，學童都需要經常練習，兩者俱進，才會熟練。
  - 在除數為分數的教學中，最要注意的錯誤類型，是學童會認為商一定比被除數小，對於這個基於整數計算經驗的錯誤類推，教師需細心處理。最好在最容易理解的「除數為單位分數」的情況下，就要開始處理。
  - 宜從「分裝」(包含除)的觀點來處理除以分數的課題。先從單位分數的情況開始。例如：「披薩 4 個，如果每位小朋友可分得 $\frac{1}{3}$ 個，共可分給多少人？」，由題意知算式應記為 $4 \div \frac{1}{3}$ 。先理解 1 個披薩，若每位小朋友可分得 $\frac{1}{3}$ 個，則 1 個披薩可分給 3 個小朋友，因此 $\div \frac{1}{3}$ ，相當於 3 倍，亦即 $\times 3$ ，因此可分給 12 位小朋友。(教師也可以在長度測量的情境中處理這個問題)。
  - 例：「披薩 4 個，如果每位小朋友可分得 $\frac{2}{3}$ 個，共可分給多少人？」，由於除數變為原來 $\frac{1}{3}$ 的兩倍，從包含除的經驗知道， $\div \frac{1}{3}$ 的結果是 $\div \frac{2}{3}$ 結果的 2 倍，所以 $\div \frac{2}{3}$ 的結果，相當於 $\div \frac{1}{3}$ 再 $\div 2$ 也就是 $\times 3 \div 2$ 。結合 5-n-08，知道這相當於 $\times \frac{3}{2}$ 。最後將算式記為 $4 \div \frac{2}{3} = 4 \times \frac{3}{2} = 6$ 。
  - 以上是答案為整數的簡單情形，答案非整數的情形宜以測量問題繼續討論。例：「一繩長 3 公尺， $\frac{2}{5}$  公尺剪成一段，可剪多少段？」，結果依照上面的計算的答案為 $\frac{15}{2}$  (段)，也就是 7 段再加上 $\frac{1}{2}$  段。由於 $3 - \frac{2}{5} \times 7 = \frac{1}{5}$ ，的確等於 $\frac{2}{5} \times \frac{1}{2}$ 。因此這與以前處理的結果相同。
  - 如果要將分數除以分數處理到最細緻(教師不見得要說明到這種地

步)，則可用到通分來說明。例：一繩長  $1\frac{1}{2}$  公尺，以一根長  $\frac{2}{5}$  公尺的木條去度量。將  $1\frac{1}{2}$  化成  $\frac{15}{10}$ ， $\frac{2}{5}$  化成  $\frac{4}{10}$ ，以  $\frac{1}{10}$  公尺為共同單位，問題變成  $15\div 4$  的問題，答案是 3 段加  $\frac{3}{4}$  段，其中這  $\frac{3}{4}$  段，長為  $\frac{3}{10}$  公尺，相當於  $\frac{2}{5}$  公尺(也就是  $\frac{4}{10}$  公尺)的  $\frac{3}{4}$ 。

- 學童一定要理解如何處理商中之真分數部分、餘數與單位量之間的關係。
- 一般的分數除法計算方式，例如： $\frac{27}{4} \div \frac{9}{5} = \frac{27}{4} \times \frac{5}{9} = \frac{27 \times 5}{4 \times 9} = \frac{15}{4}$ 。
- 另外的除法重要課題是下列問題：「半包麵粉 50 元，1 包麵粉多少元？」、「若用一木棒測量一長 100 公分之物，結果為  $2\frac{1}{2}$  段，請問木棒之長度？」、「若班上戴眼鏡的小朋友有 9 人，佔全班的 30%，請問班上有多少人？」，這些雖然是「平分」情境中的問題，卻不宜用平分的方式來思考，應改用比例方法或乘除互逆的方式來解釋。  
比例的想法：因為 1 包是半包的 2 倍，因此 1 包的價錢是 50 元的 2 倍，即 100 元。  
乘除互逆：若一包價錢為  $a$  元，由題意得  $a \times \frac{1}{2} = 50$ ，相當於  $a \div 2 = 50$ ，所以  $a$  為  $50 \times 2 = 100$ (元)。
- 能在分數的脈絡中，理解乘除互逆，例如：知道  $\frac{3}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{10}$ ，可用  $\frac{9}{10} \times \frac{5}{3} = \frac{3}{2}$  來檢驗(也就是知道  $\div \frac{3}{5}$ ，相當於  $\times \frac{5}{3}$ )。

6-n-05 能在具體情境中，解決分數的兩步驟問題，並能併式計算。	N-3-02 A-3-01
-----------------------------------	------------------

說明： ■ 本細目為小學教學關於數與量計算之總結細目。由於學童對分數尚未熟悉，在六年級，只要求學童理解與練習即可。

6-n-06 能用直式處理小數除法的計算，並解決生活中的問題。	N-3-10 N-3-11
---------------------------------	------------------

說明： ■ 被除數小數點位數不超過 3 位。  
■ 若直接從小數著手，先理解  $\div 0.1$ ，相當於  $\times 10$ ； $\div 0.01$ ，相當於  $\times 100$ 。

由此知道例如： $6 \div 0.12$ ，相當於  $6 \div (0.01 \times 12) = 6 \div 0.01 \div 12 = 600 \div 12 = 50$ ，並由此說明整數除以小數之直式計算，再解釋被除數為一般小數的情形。

- 也可直接由 6-n-04 著手，例如： $3.24 \div 1.2 = \frac{324}{100} \div \frac{120}{100} = 324 \div 120$ ，並解釋如何將此融入直式計算。
- 原則上，本細目所處理之直式計算以能整除為主。但如果依照題目的情境，需要特別處理餘數的問題時(例如：測量情境中，商為整數的情形)，則僅討論商為整數時的餘數處理問題，因為這是最自然的應用情境。另外，要教導學生可用「被除數 = 商 × 除數 + 餘數」來驗算以及檢驗自己對於餘數的理解。例如：「13.3 公升的沙拉油，每 1.8 公升裝一瓶，則可裝 7 瓶餘 0.7 公升。」其驗算為「 $7 \times 1.8 + 0.7 = 12.6 + 0.7 = 13.3$ 」。
- 讓學生理解，除法直式計算，商可能一直除不盡(例如： $\frac{1}{3} = 0.3333\dots$ )，在小學階段不進行循環小數之學習，因此學童應知道常用的處理方式是對商以四捨五入法取概數(6-n-07)，並知道此值為近似值(如 0.3 或 0.33 為  $\frac{1}{3}$  的近似值)，並能應用(例如：可標在數線上)。教師布題時，應確實注意問題的妥適性。

6-n-07 能在具體情境中，對整數及小數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減、乘、除之估算。	N-3-12
---	--------

- 說明：
- 四年級時，學童學習到對大數在指定位數取概數，僅做到加減估算(4-n-06)，六年級將取概數的數量範圍擴及小數，同時做四則估算。
  - 在應用上計算百分率(5-n-14)，經常要用到四捨五入。例如：全班有 32 人，女生有 18 人，則女生佔全班的  $\frac{18}{32}$ ，轉換成小數為 0.5625，換成整數值的百分率，則約為 56%，若允許到小數一位，則為 56.3%。

6-n-08 能在具體情境中，解決小數的兩步驟問題，並能併式計算。	N-3-02 A-3-01
-----------------------------------	------------------

- 說明：
- 本細目與 6-n-05 相同，為小學教學關於數與量計算之總結細目。由於學童對小數的除法計算尚未熟悉，在六年級，只要求學童理解與練習即可。

## 6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。

N-3-15

- 說明：
- 從日常問題中，可發現許多問題的解決，需要用到比的關係。在本細目中，正式介紹比的記法與比的相等關係，最終則要理解「比」的關係與「除」的關係二者相同。
  - 比的相等關係，為兩數並置時的比與另兩數並置時的比相等。例如：，透過單位價格如 1 斤麵粉 16 元，知道 2 斤麵粉 32 元，3 斤麵粉 48 元…，由此知道這些數對共享一個關係，可運用列表的方式：

麵粉重量 (斤)	1	2	3	4	5
價錢 (元)	16	32	48		

我們將它記為  $1:16=2:32=3:48=\dots$ ，或  $16:1=32:2=48:3=\dots$ ，學童要能發展策略判斷  $4:64=5:80$  是正確的。引導學童理解前項除以後項的不變性，並說明這些數對具有共同的商，就是比值，因此「一斤麵粉 16 元」與「1 元可買  $\frac{1}{16}$  斤麵粉」是一樣的。

- 在離散量情境時，有時會出現比值為「1 元可買  $\frac{1}{12}$  枝筆」的情況。雖然這沒有日常生活的具體意義，但卻具有解題上的意義。

## 6-n-10 能理解正比的意義，並解決生活中的問題。

N-3-15

- 說明：
- 正比關係與 6-n-11 密切相關，如速度固定時，距離與時間成正比；正方形的周長與邊長成正比。但比的相等關係強調將相比的兩類量寫在一起，直覺上較簡單。而正比則是兩類量關係中的一種，應採用列表的方式記錄，並強調要使用比值來記錄正比關係，兩者間的關係，可運用列表的方式來統整。
  - 與 6-n-10 的例子比較，正比強調麵粉每斤固定為 16 元，斤數與總價成正比，且可記錄為「總價 = 16 × 斤數」，於是可得到 1 斤麵粉 16 元，知道 2 斤麵粉 32 元，3 斤麵粉 48 元…。
  - 知道用不同長度單位去測量長度時，兩種記法的量呈現正比關係，且其比值就是單位換算的值。可以問學童，如果是面積的情況呢？
  - 也要讓學童知道兩量在變化時，一量增加，另一量也跟著增加的現象，並不見得是正比關係，並能判斷。例如：爸爸的年齡與女兒的年齡，雖然都會增加，但非正比。又例如：正方形的面積與邊長的關係並不是正比關係。

- 說明：
- 單位的分析是日後學童學習科學的重要基礎。由以前學習的數量單位(元、個、長度、重量、時間、面積、體積等)，再擴張到導出單位(如：元/個、公斤/個、公尺/分)。
  - 學生在六年級應認識乘除問題，可以利用導出單位來重新理解，並學習以單位的角度來分析問題，從而簡化思考。
  - 利用導出單位，可以解決乘法順序孰先孰後的疑慮：

$$60 \frac{\text{元}}{\text{個}} \times 5 \text{ 個} = 300 \text{ 元} = 5 \text{ 個} \times 60 \frac{\text{元}}{\text{個}}$$

- 例：「一文具公司交運鉛筆 80000 枝，若包裝成 20 箱，且 100 枝鉛筆裝一盒，問 1 箱有幾盒鉛筆？」如果用單位來解題，可看出

$$20 \text{ 箱} \times 100 \frac{\text{枝}}{\text{盒}} \times ( ) \frac{\text{盒}}{\text{箱}} = 80000 \text{ 枝}$$

因此( )應填入  $80000 \div 20 \div 100 = 40$  (盒/箱)，即每箱裝 40 盒。

- 例：「一箱裝有鉛筆 4000 枝，若一箱有 40 盒鉛筆，而 1 枝鉛筆賣 15 元，問 1 盒鉛筆賣幾元？」如果利用單位來分析，可以用下面方法解題

$$\begin{aligned} 4000 \frac{\text{枝}}{\text{箱}} &= 4000 \times \frac{15 \text{ 元}}{40 \text{ 盒}} \quad (\text{因為 } 1 \text{ 枝} = 15 \text{ 元}, 1 \text{ 箱} = 40 \text{ 盒}) \\ &= 4000 \times \frac{15 \text{ 元}}{40 \text{ 盒}} = 1500 \frac{\text{元}}{\text{盒}} \end{aligned}$$

即每盒 1500 元。

- 例：「甲地到乙地距離 80 公里，若王叔叔開車速度為 50 公里/時，問王叔叔從甲地開到乙地需要多少時間？」觀察單位可知

$$80 \text{ 公里} = 50 \frac{\text{公里}}{\text{時}} \times ( ) \text{ 時}$$

因此( )應填入  $80 \div 50 = 1.6$  (時)

- 例：「爸爸開車速度為 90 公里/時，這相當於 1 分鐘開幾公尺？」

$$\begin{aligned} 90 \frac{\text{公里}}{\text{時}} &= 90 \times \frac{1000 \text{ 公尺}}{60 \text{ 分}} \\ &= 90 \times \frac{1000 \text{ 公尺}}{60 \text{ 分}} \\ &= 1500 \frac{\text{公尺}}{\text{分}} \end{aligned}$$

即每分鐘開 1500 公尺。

- 教師千萬不要要求學生死背導出量的「單位」換算，因為真正有用的是上述的計算方式。

6-n-12 能認識速度的意義及其常用單位。

N-3-16

N-3-17

說明： ■ 這是比或比值的應用課題。小學的速度教學一律在等速的情境中教學。

- 教學上，可先固定一個因次，去理解速度大小的意義，例：100 公尺賽跑，小英跑 20 秒，小麗跑 25 秒，那麼小英跑得比小麗快。
- 例：若小英 5 秒跑 25 公尺，10 秒跑 50 公尺，15 秒跑 75 公尺，20 秒跑 100 公尺(可運用列表的方式顯現資料)，發現這些數對形成比的關係。可運用 5-n-14，知道可用「每秒跑 5 公尺」或「跑 1 公尺需要 0.2 秒」來刻畫這個關係。續引前例，以相同的推理知道小麗跑步的速度是每秒 4 公尺，而小英跑得比小麗快的事實，可以用  $5 > 4$  來說明。

- 由此引入速度的公式：速度 =  $\frac{\text{距離}}{\text{時間}}$  或 距離 = 速度 × 時間。並能應用此公式解題。引導學生觀察、發現「當速度一定時，距離與時間成正比」。

- 例：「小明從家裡走到學校，花了 15 分鐘，如果小明自己估計，他每秒可走 1.5 公尺，則家裡到學校的距離大概有多遠？」，在這樣的例子中，讓學童理解速度單位換算規則的必要。另外，雖然速度可能不均勻，但是這樣的估計，對日常應用還是有意義的。

- 常用的速度單位為每小時幾公里(公里/小時)、每分鐘幾公尺(公尺/分)、每秒幾公尺(公尺/秒)。學童應能處理如下問題：「如果小麗走路的速度是 1 公尺/秒，則小麗每小時可走多少公里？」，學生可以先用簡單的方法理解小麗每小時可走  $1 \times 60 \times 60 = 3600$  公尺，也就是 3.6 公里。但最後應能知道這相當

$1 \frac{\text{公尺}}{\text{秒}} = 3.6 \frac{\text{公里}}{\text{時}}$ ，並能用下式的想法來思考(見 6-n-09)：

$$\begin{aligned} 3.6 \frac{\text{公里}}{\text{時}} &= 3.6 \times \frac{1000 \text{公尺}}{3600 \text{秒}} \\ &= 3.6 \times \frac{1000}{3600} \frac{\text{公尺}}{\text{秒}} = 1 \text{公尺/秒} \end{aligned}$$

- 本細目的時間單位換算與計算可引入分數，應讓學生熟悉時間單位

的分數換算，如：20 分鐘 =  $\frac{1}{3}$  小時。

6-n-13	能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。(同 6-a-04)	N-3-18 A-3-02 A-3-03 A-3-04 A-3-05
--------	---	--

- 說明：
- 本細目在六年級課程應佔相當份量，作為國小課程之總結。本細目之重點在解題，希望能整合國小階段所學到之數、量、運算、數量關係，解未知數等式之經驗，進行應用問題之解題，包含說明題意，列式表述問題，發展策略解題。傳統之應用問題：雞兔問題、年齡問題、龜兔賽跑等，皆屬於本細目。
  - 希望學童能分析問題，列出多步驟之算式來解題(不一定用算式填充題)。
  - 常用的數量關係包括：和不變、差不變、積不變、比例關係、基準量問題等。
  - 例：(年齡問題)「小麗今年 12 歲，爸爸與小麗的年齡相差 24 歲，再過幾年爸爸的年齡是小麗的兩倍？」
  - 例：(平均問題)「小明的國語、社會、自然三科平均為 90 分，問小明的數學要考多少分才會讓四科平均達到 88 分？」
  - 例：(追趕問題)「小英跑步的速度是每秒 5 公尺，小麗跑步的速度是每秒 4 公尺，兩人賽跑，如果小麗在小英前方 40 公尺，請問小英何時可以趕上小麗？」
  - 例：(雞兔問題)「倉庫中有一種輪胎 100 個，可以裝在六輪小貨車上，也可以裝在四輪汽車上，今天裝配了 22 輛車子，剛好將輪胎都用光，請問這些車子中，有幾輛是六輪小貨車，有幾輛是四輪汽車？」

6-n-14	能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。(同 6-s-03)	N-3-23 S-3-07
--------	-------------------------------------	------------------

- 說明：
- 可由圓周長的實測理解圓周長與直徑成比率，其比率(比值)稱為圓周率，在教學上教師應說明圓周率大約為 3.14。
  - 理解圓面積公式為圓周率×半徑×半徑。
  - 扇形面積的計算可與分數平分的操作相互加強。知道半圓、 $\frac{1}{4}$ 圓、 $\frac{1}{8}$ 圓的面積計算方式。

6-n-15 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。(同 6-s-05)

N-3-24  
S-3-10

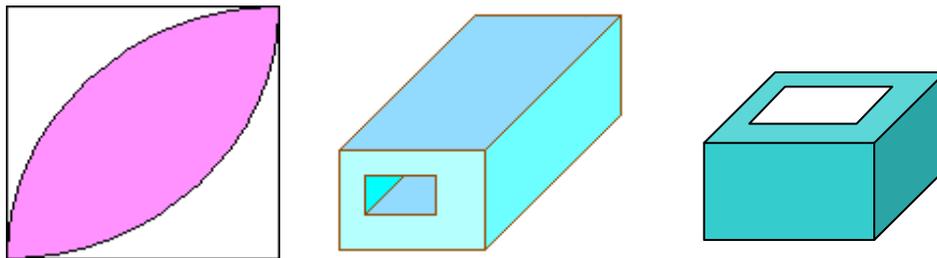
- 說明：
- 由長方體或立方體說明這類特別柱體的體積等於底面積乘以高。
  - 可舉一例如：平行四邊形，說明當初以切割說明平行四邊形面積的切割步驟，也可用來計算以平行四邊形為底之直柱體體積。並由此說明簡單直柱體的體積為底面積乘以高。
  - 最後告知或略微說明圓柱體體積也是底面積乘以高。

## 幾何

6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。

S-3-01

- 說明：
- 例：由三角形的內角和為 180 度(參見 5-s-01)，推知四邊形之內角和為 360 度。
  - 例：能計算複合、重疊、嵌入圖形的面積或體積，如下圖：



6-s-02 能認識平面圖形放大、縮小對長度、角度的影響，並認識比例尺。

S-3-04

- 說明：
- 從影印機的縮小放大(如 50%)，利用實測，知道任兩點之間的距離也以相同的比例縮小放大(如變成一半)，但是角度沒有變化。
  - 介紹地圖的使用，認識比例尺，並經由地圖的實測來計算距離。

6-s-03 能理解圓面積與圓周長的公式，並計算簡單扇形的面積。(同 6-n-14)

N-3-23  
S-3-07

- 說明：
- 先介紹圓周率的概念，知道這是圓周長對直徑的比值。
  - 圓面積可用扇形剖分的方式，大致說明圓面積等於半徑×圓周長之半，因此等於圓周率×半徑×半徑。也可用直接告知的方式。
  - 利用比例的概念，說明簡單扇形( $\frac{1}{2}$ 圓、 $\frac{1}{3}$ 圓、 $\frac{2}{3}$ 圓、 $\frac{1}{4}$ 圓、 $\frac{1}{6}$ 圓等等)。

6-s-04 能認識面與面的平行與垂直，線與面的垂直，並描述正方體與長方體中面與面、線與面的關係。	S-3-08
---	--------

說明： ■ 學生先具體觀察，知道長方體對面互相平行、鄰面互相垂直，對面與對應頂點連邊垂直。再利用長方體為工具，說明一般空間形體面與面垂直、面與面平行的意義。但不必說明面垂直與面平行的嚴格定義。

6-s-05 能理解簡單直柱體的體積為底面積與高的乘積。(同 6-n-15)	N-3-24 S-3-10
--	------------------

## 代數

6-a-01 能理解等量公理。	A-3-03
-----------------	--------

說明： ■ 能理解在等式兩邊同加、減、乘、除一數時，等式仍然成立。  
 ■ 可在課堂進行天平的操作，理解等量公理。  
 ■ 除了應用到單步驟未知數問題的解題外，也可以用來判別兩分數之相等或比較大小。  
 ■ 在操作上，教師也許可以處理較複雜有趣的解題，但當要運用等量公理到未知數問題時，應限定在單步驟問題(見 5-a-04 與 6-a-02)，讓學生體認如何以等量公理重新思考解題的意義即可，較複雜之兩步驟問題是國中階段的課題。

6-a-02 能將分數單步驟的具體情境問題列成含有未知數符號的算式，並求解及驗算。	A-3-04 A-3-05
---	------------------

說明： ■ 本細目和五年級的差別主要在於整數和分數的差別，由於分數情境遠比整數複雜，教師可藉此再重新做分數教學的整合。  
 ■ 求解的方法可用加減互逆、乘除互逆，或等量公理。  
 ■ 單步驟指的是未知數之計算步驟為單步驟，如下例：

$$\frac{1}{3} + x = 3, \quad x + \frac{1}{2} = \frac{1}{3};$$

$$x - 6 = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} - x = 1;$$

$$\frac{1}{2} \times x = 12, \quad x \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2};$$

$$x \div \frac{1}{2} = \frac{5}{3}, \quad \frac{3}{4} \div x = \frac{3}{5}。$$

6-a-03 能用符號表示常用的公式。	A-3-06
---------------------	--------

說明： ■ 本細目為「檢查細目」。藉由其他課題的教學，讓學生理解用符號代表數的好處。

■ 例：

正方形的面積 =  $a \times a$ ，其中  $a$  為正方形的邊長。

長方形的面積 =  $a \times b$ ，其中  $a$ 、 $b$  為長方形的兩鄰邊長。

直柱體的體積 =  $A \times h$ ，其中  $A$  為底面積， $h$  為高。

6-a-04 能利用常用的數量關係，列出恰當的算式，進行解題，並檢驗解的合理性。(同 6-n-13)	N-3-18 A-3-02 A-3-03 A-3-04 A-3-05
--	--

### 統計與機率

6-d-01 能整理生活中的資料，並製成長條圖。	D-3-01
--------------------------	--------

說明： ■ 學童可將現成資料，藉由次數、數量、人數、百分率製成長條圖。

■ 例：由報紙上知道下面關於各國每人每日垃圾量的資訊(中國時報 88.6)。

臺灣每個人每天的垃圾量為 1.14 公斤、日本 1.09 公斤、新加坡 1.10 公斤、德國 1.09 公斤、美國 2.00 公斤、南韓 1.07 公斤、英國 1.34 公斤、法國 1.53 公斤、荷蘭 1.58 公斤。學童學習可將上述資料繪製成如圖 1 的長條圖，再從中討論其意義。

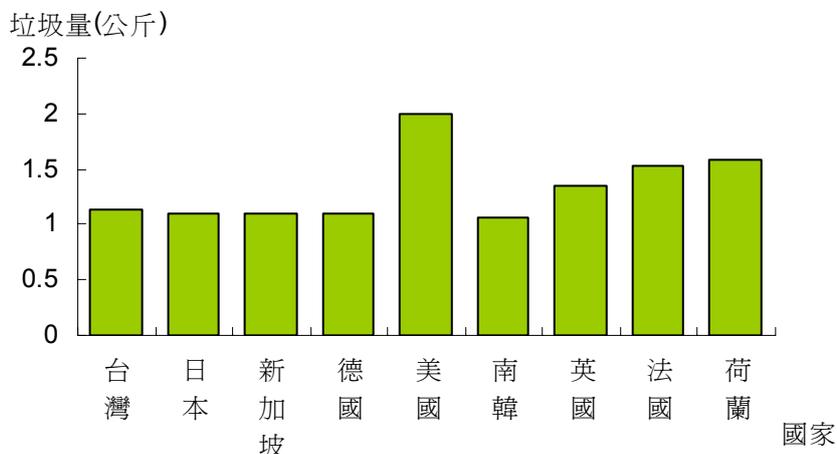


圖 1 各國每人每日垃圾數量圖

- 長條圖也可以百分率表示資料的量，這時學生可能在整理資料後，製表計算百分率後，再畫成長條圖。例如：對 50 位國小男生最喜歡的休閒活動做調查後，將各項活動的人數加以整理後如表 1，再製作長條圖，如圖 2。

表 1

活動別	打籃球	跳繩	閱讀	聊天	畫圖
人數	15	7	8	12	8
百分率	30%	14%	16%	24%	16%

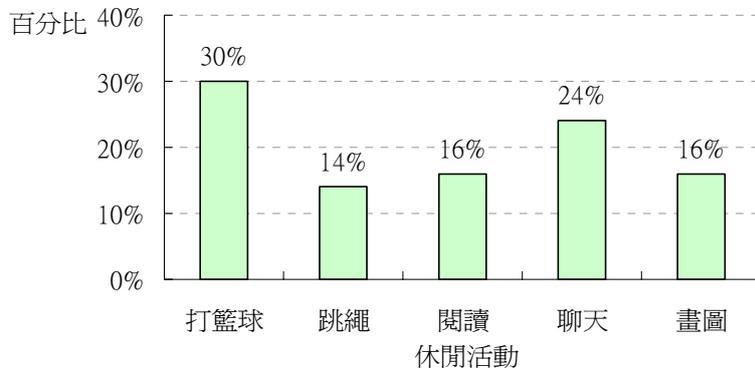


圖 2 男生休閒活動百分比長條圖

- 告知學童可利用「波浪線」節省繪製的空間。

6-d-02 能整理生活中的有序資料，並繪製成折線圖。

D-3-01

- 說明：
- 本階段，不宜引進變數或函數的概念，僅須以時間、數量的變化來說明有序資料。
  - 可使用在一種有序變化下，如時間改變、數量變化等，同時對應幾個變化的資料製作折線圖，來瞭解對應變化間的關係。
  - 教學上，資料不宜過於複雜，折線以不多於兩條為宜，並告知學童可利用「波浪線」節省繪製的空間。
  - 例：小可在暑假中某一天，每兩小時量一次氣溫，從早上六點記錄到晚上八點。如表 2，再製作折線圖，如圖 3。

表 2

時間(時)	6	10	12	14	16	18	20
氣溫(°C)	32	34.5	37	38	37	36.5	35

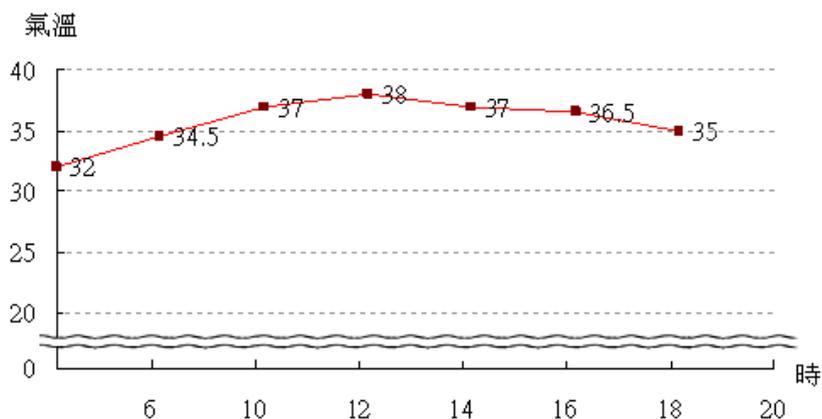


圖 3 氣溫折線圖

- 告知學童可利用「波浪線」節省繪製的空間。

6-d-03	能報讀生活中常用的圓形圖，並能整理生活中的資料，製成圓形圖。	D-3-01
--------	--------------------------------	--------

- 說明：
- 若重視資料的相對比例，可以用圓形圖來表現。教學時，可以各組次數除以所有資料次數總和所得的百分率或比值，轉換成圓心角的角度後來製作圓形圖。因此圓形圖教學必須在扇形教學之後。
  - 教學時若牽涉到較複雜的百分率，則應提供已製好的一百等分之圓形圖卡，供學童製作圓形圖。
  - 例(續 6-d-01)：將 50 位國小男生最喜歡的休閒活動，利用表 1 製作圓形圖，如圖 3 和圖 4，兩者的差別，在於呈現人數或百分率。

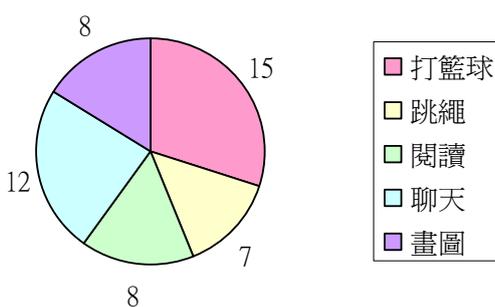


圖 3 男生休閒活動人數圓形圖

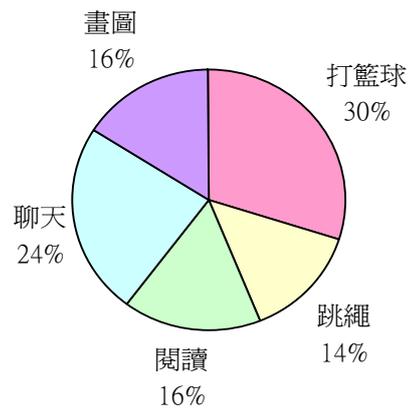


圖 4 男生休閒活動百分數圓形圖

## 7.七年級細目詮釋

### 數與量

7-n-01 能理解質數的意義，並認識 100 以內的質數。	N-4-01
--------------------------------	--------

- 說明：
- 能理解質數與合數的定義，並能檢驗 100 以內的任何數，哪些是質數，哪些是合數。
  - 能理解埃拉托賽尼(Eratosthenes)的方法，找出小於 100 的所有質數。

7-n-02 能理解因數、質因數、倍數、公因數、公倍數及互質的概念，並熟練質因數分解的計算方法。	N-4-01 N-4-02 N-4-09
--	----------------------------

- 說明：
- 本細目指的是在正整數的範圍中，理解正整數的因數、質因數、倍數、公因數、公倍數以及質因數分解等。
  - 能由尋找正整數的因數和倍數的過程理解短除法，和質因數分解的計算方法。
  - 質因數分解的計算要能熟練，但正整數位數不宜過高。
  - 例：48 的標準分解式：

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 48} \\ 2 \overline{) 24} \\ 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \end{array}$$

所以  $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 16 \times 3$ ，其中 2、3 稱為 48 的質因數，而 1、2、3、4、6、8、12、16、24、48 皆為 48 的因數，且 48 則為 1、2、3、4、6、8、12、16、24、48 的倍數。

- 例：求 48，72 的的最大公因數與最小公倍數。

仿上，72 的因數有 1、2、3、4、6、8、9、12、18、24、36、72，則兩數最大公因數為 24，亦可由短除法求得兩數的最大公因數：

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 72 \quad 48} \\ 2 \overline{) 36 \quad 24} \\ 2 \overline{) 18 \quad 12} \\ 3 \overline{) 9 \quad 6} \\ 3 \quad 2 \end{array}$$

則兩數的最大公因數( $72, 48$ )= $2^3 \times 3$  或 24，而兩數的最小公倍數

$$[72, 48] = 2^4 \times 3^2 = 144$$

- 例：求 48，72，90 的最大公因數、最小公倍數。  
 $(48, 72) = 24$ ，所以  $(48, 72, 90) = (24, 90) = 6$   
 $[48, 72] = 144$ ，所以  $[48, 72, 90] = [144, 90] = 720$
- 做正整數的質因數分解時，其質因數以不大於 100 為宜。
- 兩數最大公因數為 1 時，稱這兩數互質，如  $(24, 35) = 1$ ，所以 24 與 35 互質，明顯的 24 與 35 亦沒有共同的質因數。
- 能解相關應用問題。  
 例：一數既是 2 的倍數，也是 3 的倍數，那麼一定也是哪個數的倍數？為什麼？
- 例：兩個連續的正整數相乘等於 30，求此兩個正整數的和。  
 因為  $30 = 5 \times 6$ ，所以此兩整數是 5、6，其和  $= 5 + 6 = 11$ 。  
 正整數的因數分解的練習有助於學生學習十字交乘法，如下例。  
 例：若兩個正整數相乘為 80，但其和為奇數，求此兩正整數。

因為若  $80 = a \times b$ ，且  $a + b$  為奇數，則此兩數  $a$ 、 $b$  中恰有一為奇數。

除了因數 1 以外，80 的因數中只有 5 為奇數，所以

$$\begin{aligned} 80 &= 1 \times 80 \\ &= 5 \times 16 \end{aligned}$$

即此兩正整數為 1、80 或 5、16。

7-n-03 能以最大公因數、最小公倍數熟練約分、擴分、最簡分數及分數加減的計算。	N-4-02
---	--------

說明： ■ 銜接 N-2-03，N-2-06，加入負數的四則運算，並有能力將計算結果化為最簡分數。在國中階段學習分數的四則運算，為了達到便於溝通與辨識之目的，應鼓勵並建議學生在計算過程中要視有無需要，來決定是否要將計算過程的分數化為最簡分數，但應鼓勵或建議學生將最後的答案化為最簡分數。然而測驗時，除非有特別指定要將計算結果化為最簡分數，否則所有相對應之等值分數仍宜視為正確。

- 例： $\frac{4}{42} = \frac{2}{21}$ ， $\frac{7}{38} - \frac{3}{19} = \frac{7}{38} - \frac{6}{38} = \frac{1}{38}$

7-n-04 能認識負數，並能以「正、負」表徵生活中性質相反的量。	N-4-05
-----------------------------------	--------

說明： ■ 能認識負數是比零小的數，如零下 5 度是指零度還低 5 度的溫度，而  $-5$ 、 $-10\frac{1}{2}$ 、 $-12.3$  分別是比 0 小 5、 $10\frac{1}{2}$ 、12.3 的數。

- 正、負數在生活中的應用是指能利用正、負數來表徵生活中性質相反的量，如若往東 10 步記為 +10，則往西 4 步記為 -4；第一週公司盈餘 5000 萬記為 +5000 萬，第二週若虧損 1000 萬則記為 -1000 萬。
- 介紹負數後，將使得數在生活中應用更加方便。例如：公司在第一季獲利 1325 萬元，第二季賠 4578 萬元，第三季賠 1038 萬元，第四季賺 4238 萬元，那麼公司在這一年的賺或賠可列成  $1325 - 4578 - 1038 + 4238 = -53$  或者列成  $1325 + (-4578) + (-1038) + 4238 = -53$ ，即賠 53 萬元。
- 能認識在數線上 5 與 -5 是和原點距離相同，但方向相反的位置，所以 5 和 -5 互稱為相反數。
- 能辨別兩個負數的大小。例如：-5 是比 0 小於 5 的數，-8 是比 0 小於 8 的數。由於  $5 < 8$ ，所以  $-5 > -8$ 。  
介紹過絕對值後，可用絕對值來比較兩個負數的大小。

7-n-05 能認識絕對值，並能利用絕對值比較負數的大小。

N-4-05

說明：

- 絕對值在數學上的定義是  
若  $a > 0$ ，則  $|a| = a$ ；若  $a < 0$ ，則  $|a| = -a$ ，若  $a = 0$ ，則  $|a| = 0$ ，但這樣嚴謹的定義，不一定需要在國中階段出現，在國一階段學習絕對值應採用較直接且直觀的方式教學較佳，例如：，一個正數的絕對值就是它自己，一個負數的絕對值就是把它的負號去掉後的數，而 0 的絕對值還是 0，所

$$\text{以 } \left| -1\frac{1}{3} \right| = 1\frac{1}{3} \quad (\text{把負號去掉})$$

$$\left| 1\frac{1}{3} \right| = 1\frac{1}{3}$$

- 當學生學會負數的加減計算後，應該要理解有絕對值算式的計算，例如：  
 $10 - |-6|$  和  $10 - (-6)$  的不同。
- 絕對值在國中有兩個比較重要的應用：一個是用來比較負數的大小，另一個是用絕對值來表達數線上的兩點距離，見 7-n-08。
- 兩個負數，如果其絕對值愈大，則其值就愈小。例： $|-15| = 15$ ， $|-18| = 18$ ，因為  $|-15| < |-18|$ ，所以  $-15 > -18$ 。

7-n-06 能理解負數的特性並熟練數(含小數、分數)的四則混合運算。

N-4-05

N-4-06

N-4-08

說明： ■ 國中數感的培養，除了對實例要有數感外，更需要培養涉及正負符號的數感。

■ 在學習負數或培養上述的絕對值嚴謹定義的前置經驗，是要打破「若  $a$  代表一數，則  $-a$  通常是負數」的錯誤觀念。因此教學上，應將  $a$  以實例如： $-2$ ， $-1\frac{1}{2}$  等代入，逐漸養成「 $-a$  雖然有負號在前，但是  $-a$  也可能是正數」的觀念。如此，承續上面的例子，在教學上應讓學生舉例說明何時  $|a| = -a$ 。

■ 能理解一個數  $a$  加上另一個數  $b$  後，不一定比原來的  $a$  大。換句話說，要由  $b$  是正數或是負數才能決定  $a + b$  是否比  $a$  大或比  $a$  小：

$$a + \text{正數} > a$$

$$a + \text{負數} < a$$

反之，若  $a + b > a$ ，則要能認識到這時  $b$  是正數；而若  $a + b < a$ ，則  $b$  是負數。

■ 能理解無論  $a$  是正數或是負數， $-a$  永遠代表  $a$  的相反數。

■ 能理解無論  $a$  是正數或負數， $a + (-a) = 0$

■ 能理解無論  $a$ 、 $b$  是正或負， $a + (-b) = a - b$  以及  $a - (-b) = a + b$

能理解  $a + b$  的相反數就是  $-a - b$ ，即

$$-(a + b) = -a - b$$

因為  $a + b + (-a - b) = a + b - a - b = 0$

所以  $-a - b$  是  $a + b$  的相反數，但是  $a + b$  的相反數也可以記成  $-(a + b)$ ，

所以  $-(a + b) = -a - b$

同理也可以說明  $a - b$  的相反數是  $-a + b$

■ 能理解  $|a + b|$  會隨  $a$ 、 $b$  的符號不同，而其值會有很大的差異。例如：

$$|-298 + 300| = 2，但是 |-298 - 300| = 598$$

能理解負號和分數的關連，如

$$-\frac{2}{3} = \frac{2}{-3} = \frac{-2}{3} = (-1) \times \frac{2}{3}$$

■ 能理解  $a \cdot a$  永遠大於或等於 0。

7-n-07 能熟練數的運算規則。	N-4-08 A-4-02
-------------------	------------------

說明： ■ 本細目的運算規則指的是交換律、結合律、分配律。

$$\begin{aligned} \text{交換律: } a+b &= b+a & a \times b &= b \times a \\ \text{結合律: } (a+b)+c &= a+(b+c) & (a \times b) \times c &= a \times (b \times c) \\ \text{分配律: } (a+b) \times c &= a \times c + b \times c & (a-b) \times c &= a \times c - b \times c \\ & c \times (a+b) = c \times a + c \times b \\ & c \times (a-b) = c \times a - c \times b \end{aligned}$$

上面是交換律、結合律、分配律標準的型式，但也要理解其它變化的型式，如

$$a \times b \div c = a \times b \times \frac{1}{c} = a \times \frac{1}{c} \times b = a \div c \times b$$

$$a \div b \div c = a \times \frac{1}{b} \times \frac{1}{c} = a \times \frac{1}{b \times c} = a \div (b \times c) \text{。}$$

能分辨  $a \div (b+c) = a \times \frac{1}{b+c}$

與  $a \div b + a \div c = a \times \frac{1}{b} + a \times \frac{1}{c} = a \times \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$  的不同。

- 除了上述的運算規則，另外去括號的規則也很重要，如

$$-(a+b) = -a-b ; -(a-b) = -a+b$$

- 國中階段需要熟練交換律、結合律、分配律。在國一的階段應先從實例開始，例如：理解如何利用交換律、結合律、分配律來簡化繁雜的計算，最後能達到符號計算熟練的地步，如

$$\begin{aligned} \text{① } 980+76-376 &= 980+(76-376) \\ &= 980-300 = 680 \end{aligned}$$

$$\text{② } 25 \times 89 \times 4 = (25 \times 4) \times 89 = 8900$$

$$\text{③ } \left(-13\frac{2}{7}\right) \times 3 = -\left(13+\frac{2}{7}\right) \times 3 = -\left(39+\frac{6}{7}\right) = -39\frac{6}{7}$$

$$\text{④ } \frac{14}{15} - \left(\frac{19}{58} - \frac{1}{15}\right) = \frac{14}{15} - \frac{19}{58} + \frac{1}{15} = 1 - \frac{19}{58} = \frac{39}{58}$$

$$\text{⑤ } \frac{47}{49} - 2 \times \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{49}\right) = \frac{47}{49} - \frac{2}{16} + \frac{2}{49} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\text{⑥ } a+b-a = b+(a-a) = b$$

$$\text{⑦ } \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{a} = 1 \quad (a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$$

$$\text{⑧ } a \div \frac{b}{c} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b} \quad (b \neq 0, c \neq 0)$$

上面應用運算規則到簡化的例子，在教學上，要配合訓練學生的觀察能力。

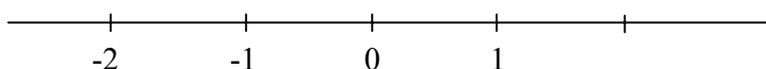
- 國一以後應加深這些運算規則的代數操作。

7-n-08	能理解數線，數線上兩點的距離公式，及能藉數線上數的位置驗證數的大小關係。	N-4-07
--------	--------------------------------------	--------

- 說明：
- 在數線上，我們稱 0 的位置為原點，且應將負數(負整數、負分數、負小數)標記在原點的左邊，正數標記在原點的右邊。標記時，知道數線上愈右邊的數愈大，愈左邊的數愈小，如  $-100 < -3 < 0 < 10$ ，而對應到數線時， $-100, -3, 0, 10$  的位置是由左排到右。
  - 數線上點所對應的數稱為點的坐標，如 A 點的坐標為  $-2$ ，可記為  $A(-2)$ 。
  - 能認識在數線上一數的絕對值等於此數與原點的距離，例如：點  $-2$  至原點的距離為 2，而  $-2$  的絕對值  $|-2| = 2$ 。
  - 數線上兩點的距離可由其坐標來計算，如 2、 $-3$  其距離為 5，亦可以用  $|-3-2|$  或  $|2-(-3)|$  表示。
  - 能理解加減法與在數線上做平移的對應關係，如  $3+10$  即是由 3 向右移 10 個單位，而  $3-10$  是由 3 向左移 10 個單位。
  - 數線是學生首次學習代數與幾何結合的題材，教學上應包括這類的題材，例如：求  $a、b$  兩點中點的坐標。在這裡只需以實例來說明，如：求  $-5$  和  $10$  中點的坐標，暫時不需要導出  $a、b$  兩點中點的坐標公式。

7-n-09	能以不等式標示數的範圍或數線上任一線段的範圍。	N-4-07 A-4-08
--------	-------------------------	------------------

- 說明：
- 能以  $x > 1$  之符號來表示所有大於 1 的數範圍，並能在數線上標記。
  - 能以  $x \leq 3$  之符號來表示所有小於或等於 3 的數的範圍，並能在數線上標記。
  - 能以  $1 < x < 3$  之符號以及數線上常用的標記來表示所有大於 1 且小於 3 的數的範圍，並能在數線上標記。
  - 任意兩個數(量)，可能相等，或者不相等。如果不相等，比較之後，其間必有大或小的關係。這些大、小關係分別以  $>、<$  來記錄。例如： $-1 < 0, 0 < 1, -2 < -1, -1 < 2$ ，以及  $2 > 1$  等等。
  - 在建立數線的時候，除了先定下 0 的位置和單位長度之外，一個基本的約定是大的數永遠記在小的數的右邊，因此正數全在 0 的右邊而負數全在 0 的左邊，如下圖所示



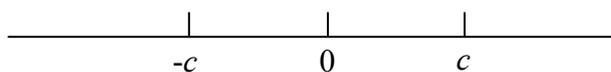
- $a < b$  的同義表示是  $b - a > 0$  或  $a - b < 0$ 。如果  $b = 0$ ，上式相當

於「 $a < 0$  和  $-a > 0$  同義」

在數線上說明( $a < 0$ ,  $-a > 0$  同時成立)



以及( $c > 0$ ,  $-c < 0$  同時成立)



和( $a < b$ )



7-n-10 能理解指數為非負整數的次方，並能運用到算式中。

N-4-09

說明： ■ 能理解 $a^n$ 的意義，其中 $n$ 為自然數， $a$ 為任一數，如

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2^4}{3^4}$$

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2^5}$$

$$(-1)^6 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$$

■ 能理解當 $a \neq 0$ 時， $a^0 = 1$ 。

■ 例： $48 = 2^4 \times 3$ ， $[36, 48] = 2^4 \times 3^2$

■ 能理解如下例的計算：

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{2^4} \times \frac{4^2}{3^2} = \frac{1}{2^4} \times \frac{(2^2)^2}{3^2} = \frac{1}{\underset{1}{2^4}} \times \frac{2^4}{3^2} = \frac{1}{3^2}$$

■ 能理解 $\left(\frac{8}{9}\right)^3 < \left(\frac{8}{9}\right)^2$ ，也就是當 $0 < a < 1$ 時，如果 $n$ 愈大，則 $a^n$

的值愈小。

■ 能理解 $\left(\frac{10}{9}\right)^3 > \left(\frac{10}{9}\right)^2$ ，也就是當 $a > 1$ 時，如果 $n$ 愈大，則 $a^n$ 的

值愈大。

7-n-11 能理解同底數的相乘或相除的指數律。	N-4-09
--------------------------	--------

- 說明：
- 能理解乘法的指數律： $a^n \times a^m = a^{n+m}$ ； $(a^n)^m = a^{nm}$ ； $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ ，其中 $m$ ， $n$ 為大於0的整數， $a$ ， $b$ 為任意數。
  - 能理解除法的指數律： $a^n \div a^m = a^{n-m}$ ，其中 $a \neq 0$ ， $n \geq m$ 。
  - 能理解 $a^0 = 1$ ，其中 $a \neq 0$ 。

7-n-12 能用科學記號表示法表達很大的數或很小的數。	N-4-10
------------------------------	--------

- 說明：
- 科學記號表示法是將正數表示成 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq a < 10$ ， $n$ 為整數。學生應知道 $a$ 不能是10的原因，是為了表示法的唯一性。
  - 雖然科學記號表示法可以應用在任何正數，但是教學上我們應強調科學記號之所以重要在於我們能用它表示很大的數和很小的數，因此教學時，要與自然科學應用的例子結合在一起。
  - 能知道自然科學領域常用的單位名稱，如：1 奈米( $nm$ ) =  $10^{-9}$  公尺( $m$ )、  
1 微米 =  $10^{-6}$  公尺( $m$ )、1 毫米( $mm$ ) =  $10^{-3}$  公尺( $m$ )、光速 =  $3 \times 10^8$  公尺/秒( $m/sec$ )等。
  - 若教學時間允許，也可以讓學生知道 $10^n$ 中的 $n$ ，其實是一種刻畫數字大小與做比較的有效指標(即所謂的「數量級」)，這是高中對數函數學習的前置經驗。

7-n-13 能理解比、比例式、正比、反比的意義，並能解決生活中有關比例的問題。	N-4-03
--	--------

- 說明：
- 比、比例式常用來表明數量間的比例關係。和其關係密切的有比值、倍數的概念。  
例：A的數量：B的數量 = 3:2 的比例式，一方面表示，當A的數量做倍數的增減時，B的數量也會呈現同樣的倍數的增減。  
例：甲 30 分鐘走 2000 公尺，45 分鐘走多少公尺？  
因為 45 是 30 的  $\frac{45}{30} = \frac{3}{2}$  倍，所以 45 分鐘走的距離是  
 $2000 \times \frac{3}{2} = 3000$  公尺。  
例：500 公克的食鹽水中有 70 公克的食鹽，同樣濃度的 750 公克的食鹽水有多少公克的食鹽？  
因為  $750 \div 500 = \frac{3}{2}$ ，所以 750 公克的食鹽水有  $70 \times \frac{3}{2} = 105$  (公克)

的食鹽。

例：5 小時做完全部作業的  $\frac{4}{9}$ ，以相同速度完成剩下的作業需要多少時間？

剩下的作業為全部作業的  $\frac{5}{9}$ ，因為剩下的作業是已做完作業的

$\frac{5}{9} \div \frac{4}{9} = \frac{5}{4}$  倍，所以需要花  $5 \times \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$  時。

另外一方面，A 的數量和 B 的數量關係是

$$A \text{ 的數量} = B \text{ 的數量} \times \frac{3}{2}$$

亦即，A 的數量是 B 的數量的  $\frac{3}{2}$  倍。

例如：若  $a$ 、 $b$ 、 $c$  均為正數，且  $a : b = 3 : 2$ ， $c : b = 8 : 7$ ，

則  $a$  和  $c$  哪一個大？由於  $a$  是  $b$  的  $\frac{3}{2}$  倍，所以  $a > b$ 。由於  $c$  是  $b$  的

$\frac{8}{7}$  倍，所以  $a > c$ 。

學生遇到比例的問題時，會遇到解題上的困難是因為問題裡常包含許多變量，而無所適從。所以上述提到的概念較能培養做比例問題的直覺，有助於解決比例問題。

- 由比值的計算，介紹繁分數。(見 7-n-15 說明)
- 比例問題在日常生活中或自然科技中有很廣泛的應用，因此國中學學習比例，其中最重要的是要能認識哪些問題可用比與比例式來解決。常見的比例問題有：折扣、加成、利率、匯率、密度、濃度、速度、比例尺等。
- 例：由「相同比例的食鹽與水可以調出一樣鹹的食鹽水」想法，介紹重量百分濃度(簡稱濃度)。  
濃度 3% 的食鹽水 500 公克中有  $500 \times 3\% = 15$  公克食鹽。  
濃度 3% 的食鹽水 500 公克與濃度 7% 的食鹽水 1500 公克混合後為濃度  
 $(500 \times 3\% + 1500 \times 7\%) \div (500 + 1500) = 0.06 = 6\%$
- 例：身高 180 cm 的人影子長為 1 m，此時影子長 150 cm 的樹之實際高度為多少？
- 例：已知書局將全部書籍以相同折扣出售，定價 80 元的書以 56 元售出，那麼定價 110 元的書將以多少元售出？
- 例：一輛時速 90 km 的汽車在高速公路上等速直線行駛 45 分鐘的距

離為多少？這段距離在比例尺1:50000的地圖上會是多少公分？

- 將濃度 10% 的食鹽水 1000 公克一杯，倒掉杯中食鹽水 100 公克，再加入 100 公克清水，然後再倒掉杯中食鹽水 100 公克，再加入 100 公克清水。請問此時這杯食鹽水的濃度是多少？
- 密度、速度是正比、反比的例子。時間相同時，距離和速度成正比。  
例：甲每 6 分鐘走 740 公尺，乙每 6 分鐘走 820 公尺，求甲、乙兩人的速度比？

$$\text{甲速度} : \text{乙速度} = 740 : 820 = 37 : 41。$$

距離相同時，時間和速度成反比。

例：甲每分鐘走 75 公尺，乙每分鐘走 90 公尺，若甲、乙兩人走完 1000 公尺，則甲、乙兩人所花的時間比？

因距離相同(都是 1000 公尺)，所以

$$\begin{aligned}\text{甲所花的時間} : \text{乙所花的時間} &= 90 : 75 \text{ (成反比)} \\ &= 6 : 5\end{aligned}$$

- 面積相同的矩形，長與寬成反比；體積相同的長方體，高與底面積成反比。

7-n-14 能熟練比例式的基本運算。
---------------------

N-4-04
--------

說明：

- 由  $a:b=c:d$ ，得到  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  及  $ad = bc$
- 例：由  $a:b=c:d$ ，得到  $a:c=b:d$
- 例：若  $a:b=c:d$ ，則  $a=ck$ ， $b=dk$
- 例：若  $3:4=(x-1):x$ ，得  $3x = 4x - 4$ ，解得  $x = 4$ 。
- 例：若  $a:b=3:7$  且  $b-a=24$ ，則令  $a=3k$ ， $b=7k$  解之。
- 例： $\overline{AB}=100$ ， $D$  在  $\overline{AB}$  上，且  $\overline{AD}:\overline{DB}=2:5$ ，則

$$\overline{AD} = 2k, \overline{DB} = 5k$$

$$\overline{AD} = \frac{2k}{2k+5k} \times \overline{AB} = \frac{2}{2+5} \times \overline{AB} = \frac{200}{7}$$

$$\overline{DB} = \frac{5k}{2k+5k} \times \overline{AB} = \frac{5}{2+5} \times \overline{AB} = \frac{500}{7}$$

7-n-15 能理解連比、連比例式的意義，並能解決生活中有關連比例的問題。
---------------------------------------

N-4-03
--------

N-4-04
--------

- 說明：
- 例： $a:b=1:2$ ， $b:c=3:4$ 則  $a:b:c=3:6:8$

- 例：  $a:b:c=3:6:8$  則  $\frac{a}{3}=\frac{b}{6}=\frac{c}{8}$
- 例：  $a:b:c=3:6:8$  則  $a=3k, b=6k, c=8k$
- 例：將 3400 元按 3:6:8 分給甲，乙，丙三人，每人各得多少元？
- 例：  $3a=4b=5c$  則  $a:b:c=\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}$
- 例：  $\triangle ABC$  中，  $\overline{AB}$ ，  $\overline{BC}$ ，  $\overline{CA}$  三邊長分別為 10， 12， 15， 則其邊上的高之比為  $\frac{1}{10}:\frac{1}{12}:\frac{1}{15}=6:5:4$
- $A$ 、  $B$  兩個正方形的面積比為 25:12， 而  $C$ 、  $B$  兩個正方形的面積比為 3:4， 請問  $A$ 、  $C$  兩個正方形的邊長比為何？  
因為  $C$ 、  $B$  兩個正方形的面積比為 3:4， 所以  $B$ 、  $C$  兩個正方形的面積比為  $4:3=12:9$ ， 因此  $A$ 、  $B$ 、  $C$  三個正方形的面積連比為 25:12:9， 我們就知道  $A$ 、  $C$  兩個正方形的面積比為 25:9， 邊長比為 5:3。  
我們也可利用  $A$ 、  $B$  兩個正方形的面積比為 25:12， 而  $C$ 、  $B$  兩個正方形的面積比為 3:4， 得到

$$A \text{ 的面積} = B \text{ 的面積} \times \frac{25}{12}$$

$$C \text{ 的面積} = B \text{ 的面積} \times \frac{3}{4}$$

因 此 ，

$$\frac{A \text{ 的面積}}{C \text{ 的面積}} = \frac{B \text{ 的面積} \times \frac{25}{12}}{B \text{ 的面積} \times \frac{3}{4}} = \frac{25}{12} \div \frac{3}{4} = \frac{25}{12} \times \frac{4}{3} = \frac{25}{9}$$

我們就知道  $A$ 、  $C$  兩個正方形的面積比為 25:9， 邊長比為 5:3。  
應注意，在國中階段不宜出現過於繁複之繁分數計算，建議將重點放在理解繁分數計算與分數除法計算之關係。在以上例子中，宜將繁分數計算轉換回分數除法，再來計算，避免直接套用算則。

- 已知買 8 公斤的蘋果的錢與買 9 公斤的梨子的錢相等，現在用買 10 公斤的蘋果的錢可以買幾公斤的梨子？
- 小明走 5 分鐘的路程，小華走了 6 分鐘，而小英只走了 4 分鐘，請問小明，小華與小英的速度比為何？
- 現有一些 100 元，500 元，1000 元的鈔票，合計 16500 元。已知 100 元，500 元，1000 元的鈔票的張數比為 5:4:3，請問各有多少張？

- 一杯濃度 20% 的糖水，加入濃度 10% 的糖水 300 公克後，變為濃度 15% 的糖水，問原有這杯濃度 20% 的糖水是多少公克？

## 代數

7-a-01 能熟練符號的意義，及其代數運算。	A-4-01 A-4-02
-------------------------	------------------

說明： ■ 能理解用  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $\dots$ 、 $x$ 、 $y$ 、 $z$  等符號代表一個數，以及數和符號構成算式的意義。例如：， $x+2$ ， $x+x$ ， $(-1)\times x$  等算式的意義。

- 能理解代數式中的符號約定。例如：，
  - $x$  可記成  $\cdot$ ，因此  $2\times x$  或  $x\times 2$  均記成  $2x$  或  $2\cdot x$ 。
  - $1\times x$ ， $1\cdot x$ ， $1x$  均記為  $x$ ， $(-1)\times x$ ， $(-2)\times x$  分別記為  $-x$ ， $-2x$ 。
  - 符號和分數的等式：

$$\frac{4}{7}x = \frac{4x}{7}, \text{ 其中 } \frac{4}{7}x \text{ 代表 } \frac{4}{7}\cdot x, \text{ 而 } \frac{4x}{7} \text{ 代表 } 4\cdot x \div 7$$

$$-\frac{4}{7}x = \frac{4x}{-7} = \frac{-4x}{7}$$

- 能對算式中相同的文字符號、常數進行合併或化簡。
- 例：化簡  $5x+1-8x-2$ 。
- 例：化簡  $2x-y+5x+2y+1$ 。
- 能理解並能以符號表徵交換律、分配律、結合律等的運算， $a\times b=b\times a$ ， $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$ ， $x y+x = x(y+1)$ 。

7-a-02 能用符號算式記錄生活情境中的數學問題。	A-4-03 A-4-04
----------------------------	------------------

- 以  $x$ 、 $y$  等符號記錄生活情境中的數學式。
- 例：若有 5 元郵票  $x$  張，則可列出  $5x$  元代表郵票面額總值。
- 例：若有 5 元郵票  $x$  張，2 元郵票  $y$  張，則可列出  $(5x+2y)$  元代表面額總值。因此，當  $x=2$ ， $y=2$  時，郵票面額總值為 14 元。

7-a-03 能理解一元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出一元一次方程式。	A-4-03 A-4-06 A-4-07
--	----------------------------

說明： ■ 例：「老師帶兩盒一樣的口香糖，要發給全班 32 個小朋友，如果每

人發 2 條，總共還剩 8 條，問每盒裝幾條口香糖？」。依題意，設每盒口香糖有  $x$  條，則可列出一元一次方程式  $2x - 32 \times 2 = 8$ 。

- 例：「小明帶 50 元到書店買彩色筆後只剩 1 元。若每枝彩色筆售價為 7 元，問小明共買幾枝？」。依題意，以  $x$  代表彩色筆的數量，則可列出一元一次方程式  $7x + 1 = 50$ 。
- 例：(年齡問題)「小麗今年 12 歲，爸爸與小麗的年齡相差 24 歲，再過幾年爸爸的年齡是小麗的兩倍？」。依題意，小麗的年齡 = 12 歲，爸爸的年齡 = (12 + 24) 歲，設再過  $x$  年後，爸爸的年齡是小麗的兩倍，則可列出一元一次方程式  $12 + 24 + x = 2(12 + x)$ 。
- 方程式解的意義就是方程式中未知數所代表的值，也就是能使方程式的等號成立的所有值。具體操作時，可將數值分別代入等號左邊與右邊的式子，判斷兩式之值是否相等。

7-a-04 能以等量公理解一元一次方程式，並做驗算。	A-4-05 A-4-07
-----------------------------	------------------

- 能理解等量公理「等式左右同加、減、乘、除一數(除數不為 0)時，等式仍然成立」的概念。如：已知  $a = b$ ，則  $a + c = b + c$ ， $a - c = b - c$ ， $a \times c = b \times c$ ， $a \div c = b \div c (c \neq 0)$ 。
- 透過生活經驗中「對等量之物做相同之運作仍會等量」的觀念，進而理解移項法則。

7-a-05 能利用移項法則來解一元一次方程式，並做驗算。	A-4-07
-------------------------------	--------

- 說明：
- 能理解等號的對稱性表示：若  $a = b$ ，則  $b = a$ 。如：若已經知道  $2 + 3 = 5$ ，則  $5 = 2 + 3$ ，即為數量等號對稱性之表現。又如：若  $2 = 3x$ ，則  $3x = 2$ ，即為式子的等號對稱性之表現。本細目也強調讓學生理解等號的對稱性，如此將有助於瞭解  $-2 = 8x$  即為  $8x = -2$ 。
  - 以等量公理延伸至更具演算功能的移項法則，例  $-3x = 6$ ， $x = 6 \div (-3)$  解得  $x = -2$ ，且宜協助學生養成寫答案時將未知數寫在等號左邊的習慣。
  - 例：解  $-x + 8 = 7x + 6$  .....(1)  
 $2 = 8x$  .....(2)  
 $8x = 2$  .....(3)
- 得到  $x = 1/4$ 。其中步驟(2)至(3)是引用等號對稱性質。若學生已能理解所有步驟時，應引導他(她)們省略步驟(2)。

7-a-06 能理解二元一次方程式及其解的意義，並能由具體情境中列出二元一次方程式。	A-4-03 A-4-09
--	------------------

- 說明：
- 二元一次方程式解的意義就是方程式中  $x$ 、 $y$  所代表的值，也就是能使方程式的等號成立的所有  $x$ 、 $y$  值。一般不要求學生將二元一次方程式的解一一求出，可利用代入法或枚舉法檢驗或找出方程式的一些解，同時讓學生知道二元一次方程式的解不是唯一的。
  - 例：小玉想用 60 元全部購買 5 元及 2 元的郵票，若設 5 元郵票  $x$  張，2 元郵票  $y$  張，則可以二元一次方程式  $5x + 2y = 60$  來求解。
  - 檢驗二元一次方程式的解是否符合題意。
  - 例：媽媽買了梨子與蘋果兩種水果平分給全家人。梨子的個數是蘋果個數的 3 倍，蘋果每人分到 2 個，還剩 3 個，梨子每人分 9 個，則不夠 3 個。請問梨子與蘋果各有多少個？  
若家人個數為  $x$ ，則梨子與蘋果的個數分別為  $9x - 3$  與  $2x + 3$ 。又已知梨子的個數是蘋果個數的 3 倍，所以  $9x - 3 = 3(2x + 3)$ ，得到  $x = 4$ ，因此梨子與蘋果的個數分別為 33 個與 11 個。  
若蘋果的個數為  $y$ ，梨子與家人的個數分別為  $3y$  與  $(y - 3) \div 2$ ，又已知梨子每人分 9 個，則不夠 3 個，所以  $3y = 9 \times ((y - 3) \div 2) - 3$ ，得到  $y = 11$ ，因此梨子與蘋果的個數分別為 33 個與 11 個。
  - 例：一艘船沿河流行駛，往來於相距 75 公里之甲、乙兩港口間，已知逆流行駛時需要花 5 小時，順流行駛時需要花 3 小時，若水流速度不變且船速保持穩，請問船在靜止水中之速度為何？水流速度為何？
  - 例：甲校的圖書數量 6 倍等於乙校的圖書數量 5 倍，如果甲校又買了 400 本新書，則甲、乙兩校的圖書數量比變為 8：9。請問甲、乙兩校原有的圖書數量各是多少？

7-a-07 能理解二元一次聯立方程式，及其解的意義，並能由具體情境中列出二元一次聯立方程式。	A-4-03 A-4-12
---	------------------

- 說明：
- 二元一次聯立方程式的解就是方程式中  $x$ 、 $y$  所代表的值，能使二元一次方程式的等號同時成立的所有  $x$ 、 $y$  值。
  - 例(雞兔問題)：倉庫中有一種輪胎 100 個，可以裝在六輪的小貨車上，也可以裝在四輪汽車上。今天裝配了 22 輛車子，剛好將輪胎都用光，請問這些車子中，有幾輛是六輪小貨車，有幾輛是四輪汽車？
  - 設六輪小貨車有  $x$  輛，四輪小貨車有  $y$  輛，則可列出二元一次聯立方程式

$$6x + 4y = 100$$

$$x + y = 22$$

來求解。

7-a-08	能熟練使用代入消去法與加減消去法解二元一次方程式的解。	A-4-12
--------	-----------------------------	--------

- 說明：
- 能使用代入消去法與加減消去法解二元一次聯立方程式。
  - 解題時，可引導學生先觀察要用那一種方法較簡易。

7-a-09	能認識函數。	A-4-01 A-4-04
--------	--------	------------------

- 說明：
- 這是第一次介紹函數，因此應該多從生活的實例來介紹，什麼數量是什麼數量的函數。學會函數的語言是國中學習函數的重點，比較嚴謹性的數學定義是要留待高中以後再教。

例如：下表是將水加熱時，加熱的時間和水溫的表

時(分)	0	3	6	9	12	15	18
水(°C)	25	45	65	85	100	100	100

由表知，只要給定時間，就能得到水溫，因此溫度是時間的函數。反之，知道溫度是 100°C，並不能完全知道加熱的時間，所以時間不是溫度的函數。

- 不需出現自變數與應變數的術語。
- 不要出現  $f(x)$ ， $g(x)$  等函數符號。

7-a-10	能認識常數函數及一次函數。	A-4-01 A-4-04
--------	---------------	------------------

- 說明：
- $y$  是  $x$  的一次函數，即  $y = ax + b$ ，其中  $a \neq 0$ 。
  - $y$  是  $x$  的常數函數，即  $y = c$ 。
  - 例：攝氏溫度與相對應的華氏溫度之關係為一次函數，如

$$y = \frac{9}{5}x + 32, \text{ 其中 } x^{\circ}\text{C 代表攝氏溫度, } y^{\circ}\text{F 代表華氏溫度。}$$

7-a-11	能理解平面直角坐標系。	A-4-10
--------	-------------	--------

- 說明：
- 由數線擴展至二維的直角坐標，並介紹相關定義及內容(含縱軸、橫軸和象限之術語，直角坐標系上坐標的定義，在直角坐標系上描出已知數對應的點，四個象限上的符號規則等)。

- 能運用直角坐標及方位距離來標定位置(不以勾股定理來計算距離)。
- 例：學生能利用直角坐標系標定教室中的座位。
- 例：能知道颱風中心在某處(如：恆春)東方 100 公里的意義。

7-a-12 能在直角坐標平面上描繪常數函數及一次函數的圖形。	A-4-11
---------------------------------	--------

- 以描繪已知點的方法來繪製一次函數的圖形，如  $y = \frac{9}{5}x + 32$ ，並觀察其圖形成一直線的現象。
- 能利用一次函數的圖形是直線，畫出一次函數的圖形。
- 常數函數的圖形是一水平線。
- 常數函數及一次函數都稱線型函數。

7-a-13 能在直角坐標平面上描繪二元一次方程式的圖形。	A-4-11
-------------------------------	--------

- 說明：
- 將二元一次方程式  $ax + by = c$ ，其中  $a$ 、 $b$  皆不為 0，改寫成一次函數的形式，得知二元一次方程式的圖形式一直線。
  - $y = d$  的圖形是一水平線。

7-a-14 能理解二元一次聯立方程式解的幾何意義。	A-4-11 A-4-12
----------------------------	------------------

- 說明：
- 能認識二元一次聯立方程式的解就兩個對應二元一次方程的直線圖形的交點。
  - 建議在七年級只處理會相交且只有一個交點的情況，其餘的情況可不在國中處理。

7-a-15 能理解不等式的意義。	A-4-08
-------------------	--------

- 說明：
- 能理解  $a > 5$  是表示
    - (1) 某個大於 5 的數。
    - (2)  $a$  是大於 5 的任意數。
  - 能理解不等號「 $\geq$ 」是表示大於或等於，不等號「 $\leq$ 」是表示小於或等於。
  - 能理解  $a > b$  是相當於  $a - b > 0$ ， $a < b$  是相當於  $a - b < 0$ 。

7-a-16 能由具體情境中列出簡單的一元一次不等式。	A-4-03 A-4-08
-----------------------------	------------------

說明： ■ 本細目所謂簡單的一元一次不等式是指

$$ax + b \leq c, \quad ax + b < c$$

$$dx + e \geq f, \quad dx + e > f$$

$$c \leq ax + b \leq d$$

- 例：若飲料一杯 20 元，塑膠袋一個 1 元，想以不超過 50 元來購買  $x$  杯飲料及一個塑膠袋，則可列出  $20x + 1 \leq 50$ 。
- 例：某小學有 100 位同學含老師參加畢業旅行，校車一輛可以載 30 人，另租中型巴士每臺可載 20 人，問至少要租中型巴士幾臺？  
答：設至少租中型巴士  $x$  臺，則  $x$  需滿足  $20x + 30 \geq 100$

7-a-17 能解出一元一次不等式，並在數線上標示相關的線段。

A-4-08

說明： ■ 能理解不等號的遞移律(如  $a > b, b > c$ ，則  $a > c$ ，或是如  $a < b, b < c$ ，則  $a < c$ )。

- 以移項法則找出形如  $x + 5 < 8, 2x + 8 < 6, 5 - x \geq 7, -2x \leq 62$  等類型之不等解的範圍，並以數線表示之。
- 不等式左右同乘、除一負數(除數不為 0)時，對不等式的影響宜再次強調，且宜安排由易至難的不等式解題活動，讓學生逐步熟練。
- 小明上山時速為每小時 3 公里，而沿同一山路下山之時速為每小時 5 公里，若小明此山路來回一趟所用時間不超過 10 小時，請問上山之路最多幾公里？

假設山路長為  $x$  公里，則小明上山花了  $\frac{x}{3}$  小時，下山花了  $\frac{x}{5}$  小時

因為小明此山路來回一趟所用時間不超過 10 小時，所以

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} \leq 10, \text{ 因此}$$

$$x \leq \frac{150}{8} = \frac{75}{4} \text{ (公里)}。$$

- 依  $a, d$  的正負將解的範圍表示成  $x$  的不等式

$$(1) a > 0, ax + b \leq c \text{ 的解為 } x \leq \frac{c-b}{a}$$

$$ax + b < c \text{ 的解為 } x < \frac{c-b}{a}$$

$$(2) a < 0, ax + b \leq c \text{ 的解為 } x \geq \frac{c-b}{a}$$

$$ax + b < c \text{ 的解為 } x > \frac{c-b}{a}$$

- 能將上述的解題應用到例如： $c \leq ax + b \leq d$  等的不等式。

**7-a-18** 能說明  $a \leq x \leq b$  時  $y=cx+d$  的範圍，並在數線上圖示。

**A-4-11**

說明： ■ 在進行一次函數  $y = ax + b$  教學時，再複習當  $x$  在某些範圍時， $ax + b$  變化的範圍。

## 8.八年級細目詮釋

### 數與量

8-n-01 能理解二次方根的意義及熟練二次方根的計算。	N-4-11 N-4-12
------------------------------	------------------

說明： ■  $a > 0$ ， $\sqrt{a}$  稱爲  $a$  的二次方根，或稱爲(正)平方根，讀爲根號  $a$ ，國中階段只討論有理數的平方根。

■ 能理解  $\sqrt{a}$  僅能在  $a$  不爲負數時才有意義。

■ 理解  $(\sqrt{2})^2 = 2$ ， $(\sqrt{3})^2 = 3$  等。

■ 能理解如  $\pm\sqrt{3}$  皆爲  $3$  的平方根，其中  $\sqrt{3}$  爲  $3$  的正平方根， $-\sqrt{3}$  爲  $3$  的負平方根。

■ 能理解  $x^2 = 3$  恰好有  $2$  個解，即爲  $\pm\sqrt{3}$ 。

■  $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ ...等這些開根號的數對學生來講是新的數，因此引進學習  $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$  的動機，對學生能學好這些新的數是非常重要的。從數學史來講，發現  $\sqrt{2}$  不是分數也是一件很重大的事情。因此，教材的編寫應有這方面的適當說明。

■ 能用畢氏定理或正方形的面積邊長關係等不同方式來理解  $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ ...等開根號數的意義。

■ 在  $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$  等數的教學中，利用畢氏定理理解這些數可用尺規作圖方式得到。

■ 能熟練正有理數的二次方根計算，如

$$\sqrt{169} = 13, \sqrt{256} = \sqrt{2^8} = \sqrt{(2^4)^2} = 2^4$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{5^2 \times 3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

■ 能熟練  $a > 0, b > 0$  時  $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ ， $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ，及

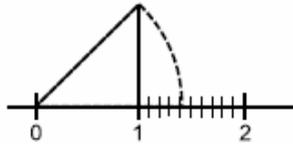
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}。$$

■ 能比較含有根號的數大小，例， $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3}$ ，所以  $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$ 。

## 8-n-02 能求二次方根的近似值。

N-4-11

- 說明：
- 能理解如 $\sqrt{132}$ 的整數部分。
  - 能以幾何方式理解 $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ ，例如：



- 能用十分逼近法，並以四捨五入求如 $\sqrt{7}$ 到小數第2位的近似值。
- 可用電算器求出近似值。

## 8-n-03 能理解根式的化簡及四則運算。

N-4-12

- 說明：
- 化簡是指每一項中只有分子含有根號，且根號中的正整數不含有完全平方數的因數。

■ 例：
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{3 \times 3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

■ 例：化簡  $\sqrt{16} + \sqrt{100} - \sqrt{25} - \sqrt{\frac{1}{9}}$

■ 例：化簡  $3\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{\frac{1}{2}}$

■ 例： $(\sqrt{2} + 1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$   
 $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$

■ 例：利用乘法公式 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ 將 $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$ 化爲 $\sqrt{2} + 1$ 。

■ 例：化簡  $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} - \sqrt{2} = 1$

■ 例：求解  $3\sqrt{8} \cdot x = 2\sqrt{3}$ ，得  $x = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{8}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

8-n-04 能在日常生活中，觀察有次序的數列，並理解其規則性。	N-4-13
----------------------------------	--------

- 說明：
- 數列常見於高速公路里程標示、火車座位號碼、計程車計費碼表等。從某些簡單、具規則的數列如：179，182，185，…和 2，4，7，11，16，…等，學習數列的相關名詞，並理解其規則性。
  - 能以  $a_n$  來代表數列一般項的符號表示法，例如：由 1、3、5、7…理解  $a_n = 2n - 1$ ，或 1、2、4、8…理解  $a_n = 2^{n-1}$ 。
  - 能由  $a_n$  的表示法來計算  $a_n$ ，如  $a_n = 4 - 3^n$ ， $a_5 = 4 - 3 \times 5 = -11$ 。這裡  $a_n$  僅限制為  $a \times b_n$  或是  $n$  的一次式。

8-n-05 能觀察出等差數列的規則性，並能利用首項、公差計算出等差數列的一般項。	N-4-13 N-4-14
---	------------------

- 說明：
- 觀察等差數列的樣式時，如：
    - 樣式一：1，2，3，4，5，……， $n$
    - 樣式二：3，6，9，12，15，……， $3n$
    - 樣式三：5，8，11，14，17，……， $3n + 2$
  - 樣式一有一規律：後一項都是前一項加 1。
  - 樣式二與樣式三都有一規律：後一項都是前一項加 3。
  - 樣式二與樣式一的關係為：樣式二的各項是樣式一的 3 倍。樣式三與樣式二的關係為：樣式三的各项比樣式二多 2。如此，樣式三與樣式一的關係為：樣式三的各项是樣式一的 3 倍多 2。
  - 應熟練等差數列求第  $n$  項的公式  $a_n = a_1 + (n - 1)d$ 。
  - 例：等差數列 80，77，74…中，求首項，公差與第 14 項。
  - 例：若三數成等差數列，等差中項為 7，求前後兩項之和。
  - 例：已知一等差數列的首項為 5，公差為 7，求第 8 項。
  - 例：已知一等差數列的首項為  $a$ ，公差為 7，第 8 項為 -1，求  $a$ 。
  - 例：已知一等差數列的首項為 -5，第 8 項為 5，求公差  $d$ 。
  - 例：已知一等差數列的首項為 5，公差為 -3，求 -13 是第幾項。

8-n-06 能理解等差級數求和的公式，並能解決生活中相關的問題。	N-4-13 N-4-14
-----------------------------------	------------------

- 說明：
- 等差級數  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  的前  $n$  項和
 
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \times n \text{ 或 } S_n = a_1 \times n + \frac{n \times (n - 1)}{2} \times d$$
 其中  $d$  為公差。

- 例：求等差級數  $-31 + (-29) + (-27) + \cdots + \cdots$  前十一項之和。
- 例：若首項為 6 的等差級數，已知前十項之和為 285，求公差及第十項。
- 例： $1 + 2 + \cdots + n = 528$ ，求項數  $n$ 。

## 幾何

8-s-01 能認識一些簡單圖形及其常用符號，如點、線、線段、射線、角、三角形的符號。	S-4-01
---	--------

- 說明：
- 認識點、線、線段、射線、角、三角形與其符號之介紹。
  - 認識四邊以上之多邊形與正多邊形。
  - 國中階段只處理凸多邊形。

8-s-02 能理解角的基本性質。	S-4-01 S-4-04
-------------------	------------------

- 說明：
- 認識角的種類：銳角、直角、鈍角、平角、周角。
  - 認識兩個角的關係：互餘、互補、對頂角。
  - 利用等量公理來理解對頂角相等。
  - 兩直線互相平行時，同位角相等、內錯角相等、同側內角互補。
  - 能理解一角的角平分線的意義。

8-s-03 能理解凸多邊形內角和以及外角和公式。	S-4-06
---------------------------	--------

- 說明：
- 理解凸多邊形的內角與外角的定義。
  - 可利用過三角形一頂點且平行對邊之直線來理解三角形的內角和為  $180^\circ$ ，或沿三角形邊界環繞一周時，計算在各個頂點之旋轉角的總和，來理解三角形的外角和為  $360^\circ$ ，從而得到三角形的內角和為  $180^\circ$ 。
  - 能理解三角形外角性質，即三角形任一外角等於其兩內對角之和。
  - 能熟練三角形內角和公式或三角形外角性質的應用。
  - 可以將多邊形分割成三角形的組合來理解多邊形的內角和公式，或沿著多邊形邊界環繞一周時，計算在各個頂點之旋轉角的總和，來理解多邊形的外角和為  $360^\circ$ ，從而得到多邊形的內角和公式。 $n$  邊形的內角和為  $(n-2) \times 180^\circ$ ， $n \geq 3$ 。
  - $n$  邊形的外角和為  $360^\circ$ 。

- 計算正  $n$  邊形的每個內角度數與每個外角度數。
- 能理解用某些正多邊形可鋪滿地面，而某些正多邊形卻不能。

8-s-04 能認識垂直以及相關的概念。	S-4-01 S-4-04
----------------------	------------------

- 說明：
- 利用直角定義兩直線互相垂直。
  - 認識  $\perp$  記號。
  - 能認識一線段之中垂線的意義。
  - 通過直線  $L$  外的一點  $P$ ，可以尺規作圖作一直線  $PQ$  垂直於直線  $L$ ，且交  $L$  於一點  $Q$ 。我們稱點  $Q$  為直線  $PQ$  在  $L$  上的垂足。利用畢氏定理，來說明  $\overline{PQ}$  為點  $P$  到直線  $L$  的最短距離。我們稱點  $P$  到垂足  $Q$  的距離  $\overline{PQ}$  為點  $P$  到直線  $L$  的距離。

8-s-05 能理解平行的意義，平行線截線性質，以及平行線判別性質。	S-4-01 S-4-07
------------------------------------	------------------

- 說明：
- 利用垂直於同一直線來定義平面上兩直線的互相平行，並認識平行的符號  $\parallel$ 。
  - 能理解兩平行線不會相交。
  - 在同一平面上，直線  $L$  分別與直線  $M, N$  交於  $P, Q$  兩個相異點，稱直線  $L$  為直線  $M$  與直線  $N$  的截線。
  - 截線  $L$  截過直線  $M, N$  後形成八個角，這些角的關係可分為同位角、同側內角、內錯角等。
  - 直線  $L$  同時垂直於直線  $M, N$  時，所形成八個角均為直角
  - 兩直線互相平行時，同位角相等、內錯角相等、同側內角互補。
  - 截線  $L$  截過直線  $M, N$  後，若下列三者中之一成立，
    - (1) 同位角相等
    - (2) 內錯角相等
    - (3) 同側內角互補
 則直線  $M, N$  互相平行。
  - 平面上，若兩直線  $L \parallel M$ ，則  $L$  上的任一點到直線  $M$  的距離均相等，這個性質稱為兩平行線間的距離處處相等。
  - 熟練應用上述的兩平行線截角性質，如平行四邊形對角相等，鄰角互補。

8-s-06	能理解線對稱的意義，以及能應用到理解平面圖形的幾何性質。	S-4-08
--------	------------------------------	--------

- 說明：
- 以生活中的平面圖形為例，來理解線對稱的意義。
  - 國中的線對稱教學，要能透過邏輯推理來理解幾何性質。例如：有線對稱的三角形一定是等腰三角形。
  - 透過平面直角坐標系來理解圖形之線對稱的鏡射圖形。(只處理對稱軸平行於坐標軸的情形)
  - 認識對稱軸、對稱點、對稱線(段)及對稱角。理解對稱線段等長、對稱角相等。
  - 線對稱圖形中，兩個對稱點之連線段會被對稱軸垂直平分。
  - 能利用線對稱的概念，理解平面圖形的幾何性質，如等腰三角形的對稱軸是其底邊的高，由此得到等腰三角形的兩底角相等，而高也是其頂角的分角線，也是底邊的中垂線。另外，線對稱也要能應用到一些特殊四邊形，例如：箏形、菱形等，如箏形的對稱軸是某一對角線，因此箏形有一對角線垂直平分另一對角線。反之，若四邊形有一對角線垂直平分另一對角線，則此四邊形是線對稱圖形，且此對角線為其對稱軸，由此得到此一四邊形為箏形。

8-s-07	能理解三角形全等性質。	S-4-09
--------	-------------	--------

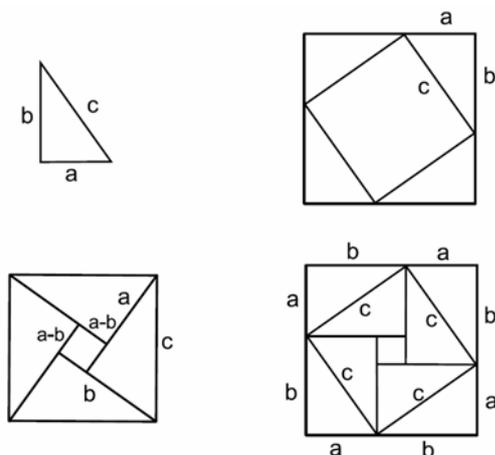
- 說明：
- 如果兩個平面圖形經過平移、旋轉或翻轉可以完全重疊在一起，它們就是兩個形狀與大小都相同的圖形，我們稱它們是兩個全等圖形。
  - 如果兩個三角形  $\triangle ABC$  與  $\triangle DEF$  可以完全重疊在一起，我們就稱  $\triangle ABC$  與  $\triangle DEF$  為兩個全等三角形，記為  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 。
  - 如果兩個三角形可以完全重疊在一起，疊在一起的頂點稱為對應點，疊在一起的邊稱為對應邊，疊在一起的角稱為對應角。
  - 一般而言，符號  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$  不一定表示  $A, B, C$  的對應點分別為  $D, E, F$ 。
  - 能理解兩多邊形全等，則其對應邊、對應角相等。反過來，若對應邊、對應角相等，則兩多邊形全等。
  - 能理解 SAS、SSS、ASA、AAS、RHS 全等性質。
  - 能以三角形的全等性質做簡單幾何推理，例如：
    - 等腰三角形兩底角相等。
    - 角的平分線上的任一點到角的兩邊距離相等。反之，同一平面上，若一點到角的兩邊之距離相等，則此點位在角的平分線上。
    - 一線段之中垂線上任一點到兩端點等距。反之，若一點到線段的

兩端點等距，則此點在此線段的中垂線上。

- 平行四邊形，對邊相等，對角線互相平分。
- 若一四邊形有一組對邊平行且相等，則此四邊形為平行四邊形。
- 若一四邊形的兩組對邊相等，則此四邊形為平行四邊形。
- 若一四邊形的兩條對角線互相平分，則此四邊形為平行四邊形。

8-s-08 能理解畢氏定理(Pythagorean Theorem)及其應用。(同 8-a-05)	S-4-05 A-4-15
--	------------------

- 說明：
- 有一個內角是直角的三角形，稱為直角三角形。
  - 可以從數學史來介紹畢氏定理，同時知道，畢氏定理又稱勾股弦定理、勾股定理或商高定理，並透過多樣的活動介紹畢氏定理，並能介紹其在生活中的應用。
  - 能由簡單面積計算導出畢氏定理(如下圖，四個全等直角三角形與一個小正方形，可拼成一個較大之正方形，經由簡單面積計算，均可推得畢氏定理  $c^2 = a^2 + b^2$ ，也就是說，直角三角形斜邊長的平方等於兩股長的平方和)。建議使用較直觀的例子。



一般來講，推導畢氏定理需要利用三角形的全等性質，但是傳統的教學上，畢氏定理均放在全等性質之前。因此，本綱要要求若畢氏定理在全等性質教學之前，則在教全等性質時，需要將畢氏定理用到全等性質的地方加以說明。主要目的是讓學生能確認全等性質→畢氏定理的邏輯思維順序。

- 已知直角三角形的兩邊長，利用畢氏定理與面積公式來計算斜邊上的高。
- 結合 SSS 全等性質來介紹 RHS 全等性質，並做簡單幾何推理。
- 利用尺規作圖及 SSS 全等性質，來理解三邊長滿足畢氏定理之三角形是一個直角三角形。

- 介紹畢氏定理在生活中的應用。

8-s-09 能熟練直角坐標上任兩點的距離公式。	S-4-05 A-4-10
--------------------------	------------------

說明： ■ 直角坐標上兩點  $A(a, b)$ 、 $B(c, d)$  的距離公式：

$$\overline{AB} = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

- 能利用距離公式解決生活上有關的問題。

8-s-10 能理解三角形的基本性質。	S-4-08 S-4-09 S-4-11 S-4-12
---------------------	--------------------------------------

說明： ■ 由兩點間直線距離最短，來理解三角形任兩邊之和大於第三邊，任兩邊之差小於第三邊。

- 能理解三個正數滿足任意二數和大於第三邊，則此三個正數必為某一三角形的三邊長。
- 理解三角形一外角等於其內對角之和，外角大於其任一內對角。
- 理解三角形中，大角對大邊，大邊對大角；等邊對等角，等角對等邊。後者是說等腰三角形，兩底角相等；若三角形兩底角相等，則此三角形為等腰三角形。
- 能利用本細目上述的闡釋解決生活上相關的問題。

8-s-11 能認識尺規作圖並能做基本的尺規作圖。	S-4-10
---------------------------	--------

說明： ■ 只利用直尺(沒有刻度)及圓規製作圖形之方法，稱為尺規作圖。

- 本細目只強調會做基本的尺規作圖即可，基本的尺規作圖明列如下面。在每一尺規作圖應能明確的說明此尺規作圖的原理，這種說明在教學上是必須的，但可以不作評量。
- 能以尺規作圖複製已知的線段、圓、角、三角形。
- 能以尺規作圖平分一已知線段。
- 能以尺規作圖作一已知線段之中垂線。
- 能以尺規作圖作一已知角的角平分線。
- 過一直線外的已知點，能以尺規作圖作此直線之平行線與垂直線。
- 過一直線上的已知點，能以尺規作圖作此直線之垂直線。
- 如果已知三個正數滿足任兩數和大於第三數，則可用尺規作圖作出以此三數為邊長之三角形。

8-s-12 能理解特殊的三角形與特殊的四邊形的性質。	S-4-02 S-4-03 S-4-04 S-4-08 S-4-12 S-4-13
-----------------------------	--

- 說明：
- 理解有一內角為直角的三角形，稱為直角三角形。
  - 理解有一內角為鈍角的三角形，稱為鈍角三角形。
  - 理解三個內角均為銳角的三角形，稱為銳角三角形。
  - 理解有兩邊相等的三角形，稱為等腰三角形。等腰三角形的兩底角相等。若三角形的兩內角相等則此三角形為等腰三角形。
  - 理解三邊等長的三角形，稱為正三角形。正三角形的三個內角都相等。若三角形的三內角相等則此三角形為正三角形。
  - 理解有兩邊相等的直角三角形，稱為等腰直角三角形。
  - 利用尺規作圖及 SSS 全等性質，來理解三邊長滿足畢氏定理之三角形是一個直角三角形。
  - 能理解長方形的兩條對角線等長且互相平分、正方形的兩條對角線等長且互相垂直平分、菱形的兩條對角線互相垂直平分、箏形的兩條對角線互相垂直且有一對角線為另一對角線之垂直平分線，並能利用三角形全等性質說明這些特性。
  - 能理解兩條對角線等長且互相平分的四邊形是長方形、兩條對角線等長且互相垂直平分的四邊形是正方形、兩條對角線互相垂直平分的四邊形是菱形，並能利用線對稱的概念說明這些特性。
  - 能理解三內角是  $30^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $90^\circ$  或是  $45^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $90^\circ$  的三角形之邊長比例關係。
  - 能利用上述比例關係得到正三角形的一邊的高，以及正三角形面積的公式。
  - 利用矩形之兩條對角線等長且互相平分，來理解直角三角形之斜邊中點到三頂點等距。

8-s-13 能理解平行四邊形及其性質。	S-4-02 S-4-04 S-4-07 S-4-13
----------------------	--------------------------------------

- 說明：
- 理解兩組對邊分別平行的四邊形稱為平行四邊形。
  - 理解四個內角都是直角的四邊形稱為矩形(長方形)。

- 理解四個內角都是直角且四邊等長的四邊形稱為正方形。
- 理解四邊等長的四邊形稱為菱形。
- 理解下列平行四邊形的基本性質：
  - 平行四邊形的一條對角線將此平行四邊形分成兩個全等三角形。
  - 平行四邊形的兩組對邊相等。
  - 平行四邊形的兩組對角相等。
  - 平行四邊形的兩條對角線互相平分。
- 理解下列平行四邊形的判別性質：
  - 若四邊形的兩組對邊分別相等，則此四邊形必為平行四邊形。
  - 若四邊形的兩組對角分別相等，則此四邊形必為平行四邊形。
  - 若四邊形的兩條對角線互相平分，則此四邊形必為平行四邊形。
  - 若四邊形的一組對邊平行且相等，則此四邊形必為平行四邊形。

<b>8-s-14</b>	能用線對稱概念，理解等腰三角形、正方形、菱形、箏形等平面圖形。	S-4-08 S-4-12 S-4-13
---------------	---------------------------------	----------------------------

- 說明：
- 能理解兩組鄰邊等長的四邊形稱為箏形。
  - 能找到等腰三角形、正方形、長方形、菱形、箏形等平面圖形之對稱軸，並能利用線對稱概念來理解其幾何性質。
  - 例如：因為等腰三角形的頂角平分線是圖形的對稱軸，所以頂角平分線會垂直平分底邊，且兩底角會相等；因為菱形的對角線是圖形的對稱軸，所以菱形的兩條對角線互相垂直平分；因為箏形有一條對角線是圖形的對稱軸，所以箏形有一對角線為另一對角線之垂直平分線，並能利用三角形全等性質說明這些線對稱的特性。
  - 反之，若四邊形有上述的線對稱關係，則要能以線對稱概念，理解這些特殊四邊形。

<b>8-s-15</b>	能理解梯形及其性質。	S-4-13
---------------	------------	--------

- 說明：
- 理解只有一組對邊平行的四邊形稱為梯形。
  - 理解兩腰等長的梯形稱為等腰梯形。等腰梯形的底角相等。若一梯形的底角相等，則此梯形是等腰梯形。
  - 等腰梯形亦為一線對稱圖形。

<b>8-s-16</b>	能舉例說明，有一些敘述成立時，其逆敘述也會成立；但是，也有一些敘述成立時，其逆敘述卻不成立。	S-4-18
---------------	--	--------

- 說明：
- 有一些敘述成立時，其逆敘述也會成立。例如：平行四邊形的兩條

對角線互相平分；若四邊形的兩條對角線互相平分，則此四邊形必為平行四邊形。

- 有一些敘述成立時，其逆敘述不成立。例如：箏形的兩條對角線會互相垂直，兩條對角線互相垂直的四邊形不一定是箏形。

8-s-17 能針對幾何推理中的步驟，寫出所依據的幾何性質。	S-4-19
--------------------------------	--------

- 說明：
- 本細目是檢查項目，不需要專章或專節處理。
  - 本細目不要要求學生能對一幾何問題的證明寫一完全的推理說明。本細目僅要求在幾何推理的教學中，要讓學生能寫出有些步驟所依據的是什麼原理。例： $ABCD$  是一平行四邊形，試說明  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，請在下面說明的空格中填出所要用的性質。

說明：連  $\overline{BD}$ ，如右圖。

因為  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，

所以  $\angle ADB = \angle CBD$  (平行線內錯角相等)

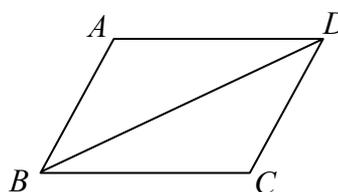
$\overline{BD} = \overline{BD}$  (共用)

因為  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，

所以  $\angle ABD = \angle BDC$  (平行線內錯角相等)

因此  $\triangle ABD \cong \triangle BCD$  (ASA 全等性質)

$\overline{AD} = \overline{BC}$ ，且  $\overline{AB} = \overline{CD}$



8-s-18 能從幾何圖形的判別性質，判斷圖形的包含關係。	S-4-03 S-4-04
-------------------------------	------------------

- 說明：
- 例：正方形是矩形的一種。
  - 例：菱形是箏形的一種。
  - 例：菱形是平行四邊形的一種。
  - 例：矩形是平行四邊形的一種。

8-s-19 能熟練計算簡單圖形及其複合圖形的面積。	S-4-04
----------------------------	--------

- 說明：
- 梯形面積 = (上底 + 下底) × 高 ÷ 2。
  - 平行四邊形的面積 = 底 × 高。
  - 箏形的面積 =  $\frac{1}{2} \times$  (兩條對角線長之乘積)。
  - 邊長為  $a$  之正三角形的面積為  $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ 。

8-s-20 能理解與圓相關的概念(如半徑、弦、弧、弓形等)的意義。	S-4-17
------------------------------------	--------

- 說明：
- 在同一平面上與一定點之距離為一定長的所有點所成的圖形稱為圓，此定點稱為圓心，此定長稱為半徑。
  - 認識圓心、半徑、直徑、圓心角、弦、圓弧、弓形及扇形等名詞。

8-s-21 能理解弧長的公式以及扇形面積的公式。	S-4-17
---------------------------	--------

- 說明：
- 圓弧長度 =  $2 \times \text{半徑} \times \pi \times \frac{q}{360}$ ， $q$  為圓弧所對的圓心角度數。
  - 扇形面積 =  $\text{半徑} \times \text{半徑} \times \pi \times \frac{q}{360}$   
 $= \frac{1}{2} \times \text{半徑} \times \text{扇形的圓弧長度}$   
 $q$  為扇形之圓弧部分所對的圓心角度數。

## 代數

8-a-01 能熟練二次式的乘法公式。	A-4-13
---------------------	--------

- 說明：
- 能熟練乘法的分配律，如： $(a + b)c = ac + bc$ 。
  - 以面積的計算及代數的交叉相乘的方法導出上列乘法公式，並利用乘法公式進行簡單速算以增進對公式的熟練運用。
  - 能熟練二次式的乘法公式，例如：
 
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$
  - 可以安排應用乘法公式的教學活動，例如：
 
$$(1) 103 \times 97 = (100 + 3) \times (100 - 3) = 100^2 - 3^2 = 9991$$

$$(2) 99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 = 9801$$

$$(3) 99^2 = 99^2 - 1^2 + 1^2 = (99 + 1) \times (99 - 1) + 1 = 9801$$

8-a-02 能理解簡單根式的化簡及有理化。	N-4-12
------------------------	--------

- 說明：
- 與 8-n-03 相同。

8-a-03 能認識多項式及相關名詞。	A-4-14
---------------------	--------

- 說明：
- 教學上可從實例介紹一元多項式的定義及相關名詞，如：多項式、項數、係數、常數項、一次項、二次項、最高次項、升冪與降冪。
  - 例如：一元二次多項式  $2x - 1 - 3x^2$  共有三項，它的降冪排列表示法

為  $-3x^2 + 2x - 1$ ，最高次項為  $-3x^2$ ，二次項、一次項及常數項分別為  $-3x^2$ 、 $2x$  及  $-1$ ，而二次項係數、一次項係數及常數項分別為  $-3$ 、 $2$  及  $-1$ 。

8-a-04 能熟練多項式的加、減、乘、除四則運算。	A-4-14
----------------------------	--------

- 說明：
- 能以直式、橫式或分離係數法做多項式加法與減法的運算。
  - 能利用分配律及直式乘法算則來熟練多項式的乘法運算。
  - 一般多項式乘法所得之乘積最高至三次，但使用 8-a-01 所列公式的計算不在此限。
  - 用長除法、分離係數法來熟練被除式為二次之多項式除法運算。

8-a-05 能理解畢氏定理(Pythagorean Theorem)及其應用。(同 8-s-08)	S-4-05 A-4-15
--	------------------

8-a-06 能理解二次多項式因式分解的意義。	A-4-16
-------------------------	--------

- 說明：
- 能理解一次多項式是另一個二次多項式因式的意義。
  - 能理解二次多項式因式分解的意義。
  - 若要將一多項式因式分解完全，就是將其化成幾個多項式的連乘，且無法再降次分解。
  - 例： $2x^2 - 2x - 4 = (x - 2)(2x + 2) \cdots(1)$   
 $\qquad\qquad\qquad = (2x - 4)(x + 1) \cdots(2)$   
 $\qquad\qquad\qquad = 2(x - 2)(x + 1) \cdots(3)$
- 以上(1)、(2)、(3)均是正確答案。

8-a-07 能利用提公因式法分解二次多項式。	A-4-16
-------------------------	--------

- 說明：
- 利用分配律，以提出公因式法分解二次多項式。
  - 例：一多項式中各項均含有相同的因式時，可提出公因式，如：  
 $(x - 2)(x + 3) + (x - 1)(x + 3) = ((x - 2) + (x - 1))(x + 3)$   
 $\qquad\qquad\qquad = (2x - 3)(x + 3)$   
 $a(x^2 + 1) + b(x^2 + 1) = (a + b)(x^2 + 1)$
  - 例：一多項式的各項雖然沒有共同因式，但可能經過恰當的分組後，組與組之間又有共同因式時，仍然可提出公因式，如：  
 $x^2 - 3x + 6x - 18 = x(x - 3) + 6(x - 3) = (x + 6)(x - 3)$

- 能夠利用分組分解法處理乘法公式之逆運算，如：

$$\begin{aligned} ac + ad + bc + bd &= (ac + ad) + (bc + bd) \\ &= a(c + d) + b(c + d) \\ &= (c + d)(a + b) \end{aligned}$$

8-a-08 能利用乘法公式與十字交乘法做因式分解。	A-4-16
----------------------------	--------

說明： ■ 以十字交乘法做因式分解。例如：

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

- 以乘法公式操作因式分解，例如：

$$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

- 能觀察係數的特性，以簡化十字交乘法做因式分解的過程。例如：  
因式分解  $x^2 - 23x + 120$  時，因為一次項係數  $-23$  為奇數，所以  $120$  應該嘗試分解為一個奇數與一個偶數的乘積，  
由  $120 = 1 \times 120 = 3 \times 40 = 5 \times 24 = 15 \times 8$   
可知  $x^2 - 23x + 120 = (x - 15)(x - 8)$

8-a-09 能在具體情境中認識一元二次方程式，並理解其解的意義。	A-4-06 A-4-16
-----------------------------------	------------------

說明： ■ 方程式解的意義就是方程式中未知數所代表的值，也就是能使方程式的等號成立的所有值。當學生不知道正規解法時，代入正整數找出適當的答案是很自然的反應，但是在解一元二次方程式，這種代入的過程不像之前所學之方程式那麼容易找出答案，也因此能自然引出因式分解等其他方式求解。

- 可以生活上的例子來介紹一元二次方程式。如：一面積為  $12$  平方公尺的長方形，已知長比寬多  $4$  公尺，問寬為多少？此問題可以  $x$  公尺代表寬，則長為  $x + 4$  公尺，二次多項式  $x(x + 4) = x^2 + 4x$  (平方公尺) 代表長方形面積，則可依據題意列出一元二次方程式  $x^2 + 4x = 12$ 。
- 介紹一元二次方程式的通式  $ax^2 + bx + c = 0$ ， $a \neq 0$ ，國中階段教學各項係數以整數為原則。
- 多項式方程式的解稱為根。

8-a-10 能利用因式分解來解一元二次方程式。	A-4-16
--------------------------	--------

說明： ■ 能利用等量公理解一元二次方程式，如

$$(x-1)(x+3)=3(x+3)$$

由方程式兩邊知若  $x+3=0$ ，即  $x=-3$ ，則等式兩邊都為 0，所以  $x=-3$  為一解。若  $x$  為不等於  $-3$  的解，因為  $x+3 \neq 0$ ，兩邊同除以  $x+3$ ，得  $x-1=3$ ， $x=4$ ，因此  $x=-3、4$  為方程式的解。

- 由等量公理來解上述二次方程式，一方面等量公理較自然，另一方面討論解的性質，再來解方程式是邏輯推理很重要的訓練。
- 若  $a \cdot b = 0$  則  $a = 0$  或  $b = 0$ ，雖然這個性質非常明白不需加以說明。但若能以簡潔的邏輯推理來加以說明，也是國中數學教育的重點。這個性質也可用等量公理來說明。
- 用因式分解能解一元二次方程式，就是用到等量公理。這一點應讓學生明瞭。以提出公因式、乘法公式的方法解一元二次方程式。

例如：解一元二次方程式  $(x+7)^2 + 5(x+7) = 0$  時，提出公因式後，得  $((x+7)+5)(x+7) = 0$ ，因此  $x+12=0$  或  $x+7=0$ ，也就是說  $x=-12$  或  $x=-7$ 。

例如：解一元二次方程式  $(x+7)^2 + 2(x+7) + 1 = 0$  時，利用乘法公式，得  $((x+7)+1)^2 = 0$ ，因此  $(x+8)^2 = 0$ ，也就是說  $x=-8$ 。

例如：解一元二次方程式  $(x+7)^2 - (x+3)^2 = 0$  時，利用乘法公式，得

$$((x+7)+(x+3))((x+7)-(x+3)) = 0，因此  $4(2x+10) = 0$ ，也就是說  $x = -5$ 。$$

- 以十字交乘法解一元二次方程式。
- 國中階段可以用二次方程式的解來解分式方程，但須在具體情境下，

例如：列式後，要求分式方程  $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{20}$  之解時，

$$\text{合併項得 } \frac{x+2-(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{20}$$

$$\text{即 } \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{20}$$

$$\text{得 } (x+1)(x+2) = 20$$

$$\text{解得 } x = 3、-6$$

注意要驗算作為分母的  $x+1、x+2$  是否會為 0。

<b>8-a-11</b> 能利用配方法解一元二次方程式。	<b>A-4-16</b>
-------------------------------	---------------

說明： ■ 能理解當無法利用因式分解法來解一元二次方程式時，可用配方法來解一元二次方程式。

- 本細目的教學應讓學生理解並熟練配方法的過程，由於配方法除了

在解二次方程式外，在其它方面也是很重要的方法，因此熟練配方法的過程是本細目的要點之一。切勿只讓學生背誦公式而已。

- 在九年級討論一元二次函數的相關性質時，配方法仍是重要的方法。
- 能以公式解來解一元二次方程式。如：方程式  $ax^2 + bx + c = 0$ ，其公式解為  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ，其中  $a \neq 0$ ，而  $b^2 - 4ac$  為判別式。
- 配方法的熟練可以  $x^2$  項的係數為 1 為主，其題型依 1 次項係數為奇偶數來區分，例如：
  - $x^2 + 8x = -1$
  - $x^2 + 3x = 2$
- 在熟練配方法之後，學習以配方法導出一元二次方程式的公式解，並由判別式知道一元二次方程式解的性質為兩相異根，或重根，或無解。

**8-a-12** 能利用一元二次方程式解應用問題。

**A-4-16**

- 說明：
- 根據應用問題的題意列出一元二次方程式並求解，再由其解中選擇合於原問題的答案。
  - 例如：甲、乙兩人分別由臺中開車到高雄，如果已知兩地相距 180 公里，兩人的平均時速相差 20 公里/小時，而且甲比乙少用 45 分鐘，請問兩人時速各是多少？

設甲的平均時速為  $x$  公里/小時，乙的平均時速為  $(x - 20)$  公里/小時，

由題意得  $\frac{180}{x-20} - \frac{180}{x} = \frac{45}{60}$ ，等號兩邊同乘以  $x(x-20)$  可將它

轉變成一元二次方程式

$$180x - 180(x - 20) = \frac{3}{4}x(x - 20)$$

整理可得  $3x^2 - 60x - 14400 = 0$

再利用十字交乘法得  $3(x - 80)(x + 60) = 0$ ，

因此  $x = 80$  及  $x = -60$  都是這個一元二次方程式的解。

又因為  $x = 80$  與  $x = -60$  均不會使原有分式方程各項的分母為零且均使得分式等號左右之值相等，所以  $x = 80$  與  $x = -60$  也都是分

式方程  $\frac{180}{x-20} - \frac{180}{x} = \frac{45}{60}$  的解。

但平均時速不會是負數，因此  $x = 80$ ，也就是說，

甲的平均時速為 80 公里/小時，乙的平均時速為 60 公里/小時。

## 9.九年級細目詮釋

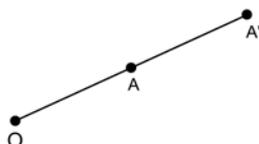
### 幾何

9-s-01 能理解平面圖形縮放的意義。

S-4-14

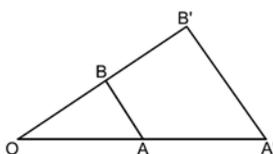
說明：

- 如下圖，在平面上固定一點 $O$ ，任意取一點 $A$ ，在 $\overrightarrow{OA}$ 上取一點 $A'$ 使得 $\overline{OA'} = 2\overline{OA}$ ，稱 $A'$ 是以 $O$ 為中心將 $A$ 縮放2倍的點。

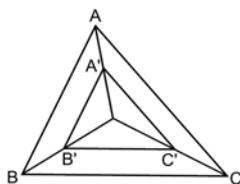


- 將平面圖形上的任一點，由 $O$ 縮放2倍的結果，就是由 $O$ 將此平面圖形縮放2倍後的圖形。

例如：下圖表示由 $O$ 將 $\overline{AB}$ 縮放2倍的情形：



例如：下圖表示由 $O$ 將 $\triangle ABC$ 縮放 $\frac{1}{2}$ 倍的結果：



- 在 6-s-02，已要求能在直觀上認識縮放對長度、角度的影響，因此本細目要求能由推理來理解下面的性質：
- 任意的縮放，將直線變成直線。
- 將一直線縮放 $r$ 倍後，若此直線和原直線是相異的二條直線，則這二條直線平行。
- 任意 $r$ 倍的縮放，將任一長度為 $l$ 的線段變成另一長度為 $rl$ 的線段。
- 任意的縮放，將一角度變成另一角，同時角度的度數不變。
- 任何圖形，經過一 $r$ 倍的縮放，雖然縮放的中心點不同，但所得到的圖形會全等，因此通常在談論圖形縮放的性質時，通常不會特別提

及中心點。

9-s-02 能理解多邊形相似的意義。

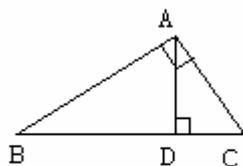
S-4-15

- 說明：
- 能理解兩個平面圖形，若其中一個經過縮放動作後，和另一個圖形全等，則稱這兩個平面圖形相似。此時，這兩個平面圖形之對應角相等，且對應邊長成比例。
  - 反之，兩個同邊數的多邊形，若對應角相等且對應邊長成比例時，則這兩個多邊形會相似。
  - 兩個多邊形相似以符號  $\sim$  表示。  
例如： $\triangle ABC$  與  $\triangle DEF$  相似，記做  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。
  - 一般而言，當記錄  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$  時，並不表示  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的對應點一定分別是  $D$ 、 $E$ 、 $F$ 。
  - 能理解任意兩個正  $n$  邊形皆相似。

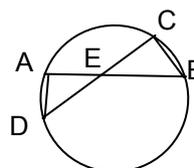
9-s-03 能理解三角形的相似性質。

S-4-15

- 說明：
- 理解三角形的 AA、SAS、SSS 等相似性質。
  - 理解兩相似三角形中，對應邊長之比 = 對應邊高之比，及對應面積之比 = 對應邊長平方比。
  - 能利用平行線的性質來做出或找出相似三角形。
  - 對直角三角形，能利用斜邊上的高來做出或找出相似三角形，也就是說若直角三角形  $\triangle ABC$  中， $\angle A = 90^\circ$  且  $\overline{AD}$  為斜邊  $\overline{BC}$  上的高，則  
$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$$
  
此時  $\overline{AB}^2 = \overline{BC} \times \overline{BD}$ ， $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \times \overline{DC}$ ， $\overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{CD}$ 。



- 能利用兩弦相交來做出或找出相似三角形，知道右圖中兩三角形  $ADE$  和  $BCE$  相似。



9-s-04 能理解平行線截比例線段性質及其逆敘述。

S-4-07

- 說明：
- 經過三角形一邊的中點且平行於另一邊的直線，一定通過第三邊中

點，且此線段長為底邊長度的一半。

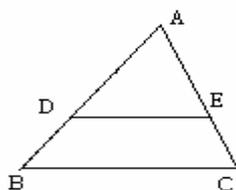
- 連接三角形兩邊中點的線段必平行於第三邊，且長度等於第三邊的一半。
- 比例線段性質：當四個線段中，兩個線段的比等於另兩個線段的比時，我們稱這四個線段為等比例線段，簡稱這四個線段成比例線段。
- 平行線截比例線段性質：設一直線平行於三角形的一邊，且與另兩邊相交，則此直線把這兩邊截成比例線段，也簡稱為平行線截線性質。

在 $\triangle ABC$ 中 $D$ 在 $\overline{AB}$ 上， $E$ 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{DE}$ 平行於 $\overline{BC}$ ，則

$$\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC} \quad \overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC}$$

$$\overline{AB} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{EC}$$

而且，更進一步可得到  $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC}$



- 能利用截線段成比例線段來判別兩直線是否平行：若一直線把一個三角形的兩邊截成比例線段，則這直線必平行於此三角形的第三邊。(這是平行線截比例線段性質之逆敘述。)

在 $\triangle ABC$ 中 $D$ 在 $\overline{AB}$ 上， $E$ 在 $\overline{AC}$ 上，且

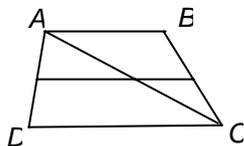
$$\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC} \quad \text{或} \quad \overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AE} : \overline{AC} \quad \text{或}$$

$$\overline{AB} : \overline{DB} = \overline{AC} : \overline{EC}$$

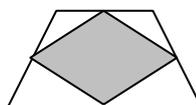
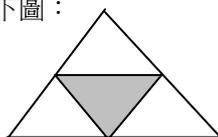
成立時，

則 $\overline{DE}$ 平行於 $\overline{BC}$ 且 $\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC}$ 。

- 能利用平行截線性質做幾何推理，如梯形的中線長為上下底和的一半，如下圖



- 三或四邊形各邊中點連線所成的多邊形的面積和原多邊形面積的關係，如下圖：

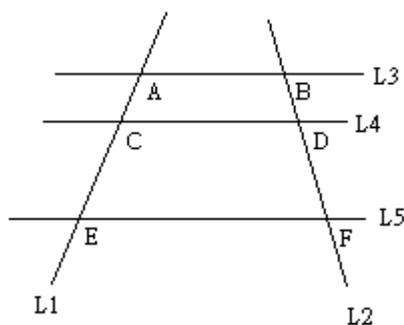


左圖中灰色三角形面積是原三角形的 $\frac{1}{4}$ ，右圖中灰色四邊形為原四

邊形的 $\frac{1}{2}$ 。

- 已知直線 $L_3$ 、 $L_4$ 、 $L_5$ 互相平行，而且直線 $L_1$ 與 $L_3$ 、 $L_4$ 、 $L_5$ 分別交於 $A$ 、 $C$ 、 $E$ ，直線 $L_2$ 與 $L_3$ 、 $L_4$ 、 $L_5$ 分別交於 $B$ 、 $D$ 、 $F$ ，

則 $\overline{AC} : \overline{CE} = \overline{BD} : \overline{DF}$



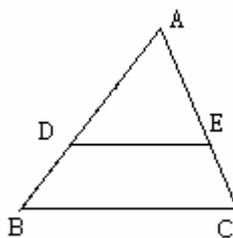
9-s-05 能利用相似三角形對應邊成比例的觀念，解應用問題。

S-4-15

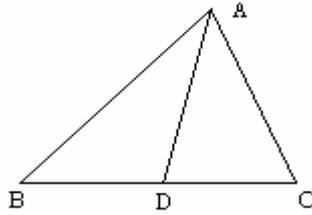
說明： ■ 理解比例計算公式：在 $\triangle ABC$ 中 $D$ 在 $\overline{AB}$ 上， $E$ 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{DE}$ 平行於 $\overline{BC}$ ，

則

$$\begin{aligned} \overline{AD} : \overline{DB} &= \overline{AE} : \overline{EC} \\ \overline{AD} : \overline{AB} &= \overline{AE} : \overline{AC} \\ \overline{AB} : \overline{DB} &= \overline{AC} : \overline{EC} \\ \overline{AD} : \overline{AB} &= \overline{DE} : \overline{BC} \end{aligned}$$

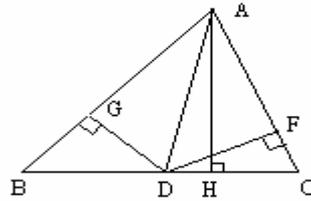
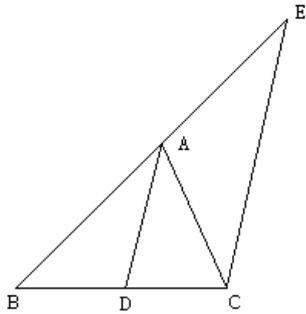


- 利用相似形比例計算公式，應用於實物的測量，例如：樹的高度、河的寬度等測量問題。
- 利用相似形比例計算公式，說明坐標平面上一次方程式的圖形恰好是一直線。
- 利用平行線截線性質做三等分一線段的尺規做圖。
- $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD}$ 為 $\angle A$ 的角平分線且交 $\overline{BC}$ 於 $D$ 點，則 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 。



方法一(下左圖): 過C點做 $\overline{AD}$ 之平行線, 交直線 $AB$ 於 $E$ 。由 $\overline{AD}$ 平行 $\overline{CE}$ 得 $\angle ACE = \angle CAD$ ,  $\angle AEC = \angle BAD \dots(1)$ ,

以及  $\overline{BA}:\overline{AE} = \overline{BD}:\overline{DC} \quad \because \overline{AD}$ 為 $\angle A$ 的角平分線,  
 $\therefore \angle BAD = \angle CAD \dots(2)$  由(1)(2)我們得  
 $\angle ACE = \angle AEC$ ,  $\overline{AE} = \overline{AC}$ , 因此 $\overline{AB}:\overline{AC} = \overline{BD}:\overline{DC}$



方法二(上右圖): 做 $\overline{DG}$ 垂直 $\overline{AB}$ , 並做 $\overline{DF}$ 垂直 $\overline{AC}$ 。  
 $\because D$ 在 $\angle A$ 的角平分線上,  $\therefore \overline{DG} = \overline{DF}$ ,  
 $\therefore$ 因此 $\triangle ADB:\triangle ADC = \overline{AB}:\overline{AC}$  (有等長的高 $\overline{DG} = \overline{DF}$ )。  
 做 $\overline{AH}$ 垂直 $\overline{BC}$ ,  
 $\therefore \triangle ADB:\triangle ADC = \overline{BD}:\overline{DC}$  (有相同的高 $\overline{AH}$ ),  
 所以 $\overline{AB}:\overline{AC} = \overline{BD}:\overline{DC}$

9-s-06 能理解圓的幾何性質。	S-4-17
-------------------	--------

- 說明：
- 理解圓心角、圓周角、弦切角的意義。
  - 能理解圓心角的度數等於所對弧的度數。
  - 能理解同一弧所對的圓周角是所對圓心角的一半。
  - 能理解弦切角是所對圓心角的一半。

- 能理解圓內接四邊形的對角互補。反之，若四邊形的對角互補，此四邊形有外接圓。
- 能理解圓內接三角形的一邊為直徑時，此三角形必為直角三角形；反之亦然。
- 能利用對稱性理解圓的相關性質。例如：圓外一點與圓心的連線為此圓之一對稱軸，而過此點之兩切線段為對稱線段，因此兩切線段等長。

9-s-07 能理解直線與圓及兩圓的關係。	S-4-17
-----------------------	--------

- 說明：
- 理解點與圓的位置關係。依據點到圓心之距離大於、等於或小於半徑，判斷此點位於圓的外部、圓上或圓的內部。
  - 理解直線與圓的位置關係。依據圓心到直線之距離大於、等於或小於半徑，判斷此直線與圓不相交、相切或交於兩點。
  - 理解切線性質：圓心與切點的連線必垂直此切線。反之，若一直線過圓上一點且垂直於過此點之半徑，則此直線為該圓之切線。
  - 圓心到弦的垂直線段(長)稱為弦心距，且該線段垂直平分此弦。利用畢氏定理可知：同一圓中，弦心距愈長，則弦愈短，反之亦然；兩弦心距等長，則兩弦也等長，反之亦然。
  - 理解兩圓的位置關係(外離、相切、交於兩點、內離或重合)及內、外公切線。
  - 理解兩圓相切時連心線會通過切點。
  - 知道兩圓的位置與半徑，能求公切線段長。

9-s-08 能理解多邊形外心的意義和相關性質。	S-4-16
--------------------------	--------

- 說明：
- 若一多邊形的頂點都落在一個圓上，則稱此圓為此多邊形的外接圓，而外接圓的圓心稱為此多邊形的外心。
  - 能理解多邊形的外心一定要落在每一邊的中垂線上。
  - 能判斷某些多邊形沒有外心。
  - 能理解任一個三角形必有外心；不共線三點必共圓。
  - 能理解一四邊形若其對角互補，則此四邊形有外接圓，或者說此四邊形有外心。
  - 理解多邊形的外心至各頂點等距離，而且此距離為其外接圓半徑。理解直角三角形斜邊中點是此三角形的外心，因此其斜邊中點到三頂點等距離。

9-s-09 能理解多邊形內心的意義和相關性質。	S-4-16 S-4-17
--------------------------	------------------

- 說明：
- 多邊形內切圓的圓心稱爲此多邊形的內心。
  - 能理解多邊形的內心一定落在每個頂點的角平分線上。
  - 能理解某些多邊形不一定有內心。
  - 任一個三角形必有內心；三角形的內心在三角形的內部。
  - 理解多邊形的內心至各邊等距離，而且這個距離就是內切圓的半徑。
  - 設  $\triangle ABC$  周長  $s$ ，內切圓半徑  $r$ ，則  $\triangle ABC$  的面積 =  $\frac{sr}{2}$ 。直角三角形中，內切圓半徑  $r = (\text{兩股和} - \text{斜邊}) \div 2$ 。

9-s-10 能理解三角形重心的意義和相關性質。	S-4-16
--------------------------	--------

- 說明：
- 能理解通過三角形頂點且能將三角形分割成面積相等的兩個三角形之直線一定是此三角形中線。
  - 三角形三條中線必相交於同一點，這個點稱爲三角形的重心。
  - 理解三角形的重心到一頂點距離等於它到對邊中點的兩倍。
  - 理解三角形三條中線將三角形面積六等份。
  - 學生也應知道重心的物理意義，並由此知道任何多邊形都有重心。

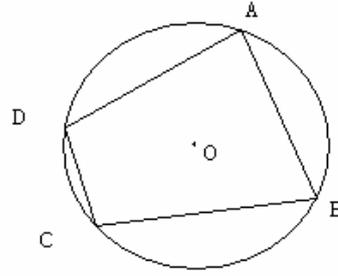
9-s-11 能理解正多邊形的幾何性質(含線對稱、內切圓、外接圓)。	S-4-08 S-4-13 S-4-17
------------------------------------	----------------------------

- 說明：
- 正多邊形有內切圓與外接圓，且它們爲同心圓。
  - 正六邊形可等分成六個正三角形。
  - 能理解正多邊形的線對稱性質(依邊數之奇偶而有不同)。

9-s-12 能認識證明的意義。	S-4-19 A-4-20
------------------	------------------

- 說明：
- 數學證明是由已知條件或已經確定是正確的性質來推導出某些結論。因此學生在學習時，應將每一步驟所根據的理由適切地表達出來。
  - 在幾何推理，8-s-17 已要求學生能將幾何推理步驟所依據的性質用填寫空格方式作答。
  - 本細目的證明並不侷限於幾何推理，也可以包括代數或數與量的推理。本細目的教學僅要讓學生初步認識證明的意義，因此推理的步驟以二、三個步驟爲限，如下面的例子所示：

例 1: 如右圖, 圓  $O$  為四邊形  $ABCD$  之外接圓, 試證明圓  $O$  的周長大於四邊形  $ABCD$  之周長。



證明:

因為

$AB$  弧長  $>$   $\overline{AB}$ ,  $BC$  弧長  $>$   $\overline{BC}$ ,

$CD$  弧長  $>$   $\overline{CD}$ ,  $DA$  弧長  $>$   $\overline{DA}$ ,

所以

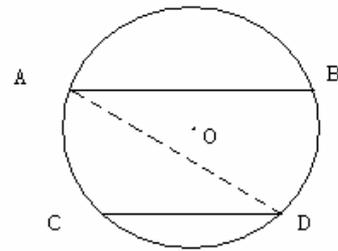
$AB$  弧長  $+ BC$  弧長  $+ CD$  弧長  $+ DA$  弧長  $>$   $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$

(兩點間的距離以直線最短)

(等量公理)

因此, 圓  $O$  的周長大於四邊形  $ABCD$  之周長。

例 2: 如右圖,  $\overline{AB}$  與  $\overline{CD}$  為圓  $O$  之平行兩弦, 試證明  $AC$  弧長 =  $BD$  弧長。



證明:

連接  $\overline{AD}$ ,

因為  $\overline{AB}$  與  $\overline{CD}$  平行,

(已知)

所以  $\angle ADC = \angle BAD$

(內錯角相等)

因此  $AC$  弧長 =  $BD$  弧長。

(等角對等弧)

例 3: 若  $a$ 、 $b$ 、 $c$  為三個正整數, 且滿足  $a^2 + b^2 = c^2$ , 試證明  $c - b$  可以整除  $a^2$ 。

證明:

由  $a^2 + b^2 = c^2$

(已知)

得  $a^2 = c^2 - b^2$

$= (c - b)(c + b)$

(方差公式)

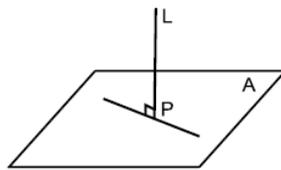
因此  $a^2 \div (c - b) = c + b$

所以  $c - b$  可以整除  $a^2$

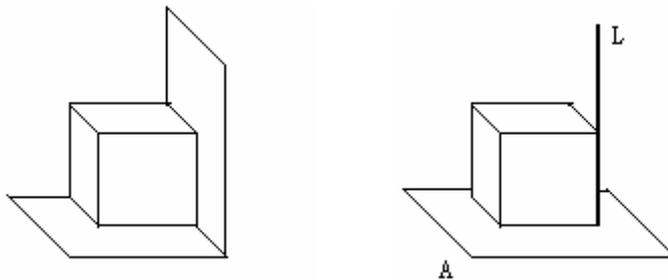
9-s-13 能認識線與平面、平面與平面的垂直關係與平行關係。

S-4-01

- 說明：
- 初次學習線與平面、平面與平面的垂直關係與平行關係時，我們以直觀且可操作為教學之重點。
  - 長方體的每個面都是矩形、任兩條相交之稜線互相垂直。
  - 長方體之側面與底面垂直、長方體的高與底面垂直。
  - 正如同直角三角板是檢查平面上兩線垂直或平行的方便工具，我們將用長方體來檢查兩平面垂直或平行，一直線與一平面垂直。
  - 利用長方體之側面與底面垂直來理解，若兩平面能同時與一長方體之側面與底面緊密貼合，則兩平面互相垂直。
  - 利用長方體的高與底面垂直來理解，一已知直線及一已知平面能同時地分別與一長方體的高及底面緊密貼合，則此一直線垂直於此一平面。
  - 利用長方體上相交的稜線互相垂直來理解一已知直線  $L$  垂直於平面  $A$ ，且交於一點  $P$ ，則此平面  $A$  上通過交點  $P$  的任一直線都與直線  $L$  互相垂直。



- 能藉由長方體的高與上下兩平行底面均垂直的已知現象理解一直線同時垂直於兩已知平面，則這兩個平面互相平行。



能利用畢氏定理求長方體中相隔最遠的兩頂點距離。

9-s-14 能理解簡單立體圖形。	S-4-01 S-4-02
-------------------	------------------

- 說明：
- 本細目所指的簡單立體圖形包括球、直角柱、直角錐、圓柱、直圓錐等。
  - 由空間中多邊形的面所圍成的立體圖形稱為多面體。
  - 能理解柱體與錐體的頂點、面、邊等組合因素。
  - 上下底為兩個全等多邊形，且側面均為矩形的柱體叫做直角柱。
  - 下底為正多邊形，且側面均為等腰三角形的錐體叫做正角錐。
  - 上下底為兩個全等圓形，且兩底圓心之連線會垂直於上下兩底的柱體叫做直圓柱。
  - 下底為圓形，且錐的頂點與底面圓心的連線垂直於底面的錐體叫做直圓錐。

9-s-15 能理解簡單立體圖形的展開圖，並能利用展開圖來計算立體圖形的表面積或側面積。	S-4-01 S-4-04
--	------------------

- 說明：
- 本細目的教學目標在於利用展開圖，求立體圖形的表面積，特別要處理直圓柱、直圓錐、正角錐的情況。
  - 國中階段只處理直角柱、直圓柱、直圓錐與正角錐之展開圖。避免從過於複雜的展開圖反推原有的立體圖形。
  - 能利用展開圖來計算長方體表面上兩點之最短距離。

9-s-16 能計算直角柱、直圓柱的體積。	S-4-01 S-4-04
-----------------------	------------------

- 說明：
- 直角柱及直圓柱的體積均為底面積乘以高。

## 代數

9-a-01 能理解二次函數的意義。	A-4-04
--------------------	--------

- 說明：
- 以實例來理解二次函數  $y = ax^2 + bx + c$ ， $(a \neq 0)$  的意義。
  - 例如：正方形面積  $y$  與邊長  $x$  的關係為  $y = x^2$ 。
  - 例如：由給定之實際觀測數據來理解自由落體或拋擲物體時，因為受到地心引力的影響，物體與地面的距離  $y$  是時間  $x$  的二次函數。

9-a-02 能描繪二次函數的圖形。	A-4-18
--------------------	--------

- 說明：
- 因為在拋擲物體時，物體因為受到地心引力的影響，使得物體與地

面的距離  $y$  是時間  $x$  的二次函數，所以我們也經常稱二次函數之圖形為拋物線。

- 以描點的方式繪製二次函數  $y = ax^2$  之圖形 ( $a \neq 0$ )，並能察覺圖形的對稱軸及最高點或最低點。
- 以描點的方式繪製二次函數  $y = ax^2 + k$  之圖形 ( $a \neq 0, k \neq 0$ )。發現圖形的對稱軸及最高點或最低點，並能察覺此圖形與二次函數  $y = ax^2$  圖形之關係。
- 以描點的方式繪製二次函數  $y = a(x-h)^2$  之圖形 ( $a \neq 0, h \neq 0$ )。發現圖形的對稱軸及最高點或最低點，並能察覺此圖形與二次函數  $y = ax^2$  圖形之關係。
- 能察覺二次函數  $y = a(x-h)^2 + k$  圖形之對稱軸是直線  $x = h$ 。  
 $a > 0$  時，圖形開口向上，其最低點是  $(h, k)$ ； $a < 0$  時，圖形開口向下，其最高點是  $(h, k)$ 。
- 能利用二次函數  $y = a(x-h)^2 + k$  理解二次函數的對稱軸是通過其最高點或最低點的鉛垂線。
- 能利用對稱軸與最高點或最低點之知識，快速描繪二次函數  $y = a(x-h)^2 + k$  的大致圖形。
- 能將二次函數  $y = ax^2 + bx + c$  以配方法推演成  $y = a(x-h)^2 + k$ ，找出頂點坐標  $(h, k)$  及圖形的對稱軸，然後描繪其圖形。

9-a-03 能計算二次函數的最大值或最小值。	A-4-17
-------------------------	--------

- 說明：
- 能由函數圖形中理解二次函數的最大值或最小值。
  - 能由列表理解二次函數  $y = a(x-h)^2 + k$  有最大值或最小值。
  - 能利用配方法，將二次函數寫為  $y = a(x-h)^2 + k$ ，  
若  $a < 0$ ，則  $a(x-h)^2 \leq 0$ ，因此  $y$  的最大值為  $k$ ；  
若  $a > 0$ ，則  $a(x-h)^2 \geq 0$ ，因此  $y$  的最小值為  $k$ 。

9-a-04 能解決二次函數的相關應用問題。	A-4-17 A-4-18
------------------------	------------------

- 說明：
- 利用二次函數圖形的頂點及開口方向，求得二次函數的最大值或最小值。
  - 例如：所有周長為已知正數  $a$  的矩形中，以正方形的面積最大。
  - 例如：拋擲物體時，物體與地面的距離  $y$  是時間  $x$  的某一個已知的二次函數，則求出此二次函數的最大值，就可以知道拋擲過程中，何時達到最高點及最高點與地面的距離。

- 認識開口向下的拋物線與水平軸的兩個交點，為其對應一元二次方程式的根，也為物體拋射運動的水平起點與落點。

## 統計與機率

9-d-01	能將原始資料整理成次數分配表，並製作統計圖形，來顯示資料蘊含的意義。	D-4-01 D-4-02 D-4-03
--------	------------------------------------	----------------------------

- 說明：
- 學生應循序漸進，在非分組的情況，學習各種統計圖表之製作，並計算各種統計指標(9-d-02, 9-d-03)。等觀念清楚後，再學習分組的處理方式，並知道分組的使用時機。
  - 將資料發生的「次數」或「人數」視需要加以排序或分組整理而成的表格統稱為次數分配表。「相對次數」是將各筆或各組資料的次數除以總次數所得的比值。
  - 「累積次數」則為經排序或分組整理後，依序累加至各筆或各組資料的次數；「累積相對次數」則為依序累加至各筆或各組的相對次數。累積次數或相對累積次數可以讓人知道資料在整體中所佔的相對位置。
  - 例：中山國中三年一班的數學科第一次段考成績總表，如下表：

表 1、三年一班各組成績相對次數折線圖

座號	1	2	3	4	5	6	7	8
成績	5	64	35	78	36	43	44	82
座號	9	10	11	12	13	14	15	16
成績	83	48	52	55	58	64	65	68
座號	17	18	19	20	21	22	23	24
成績	69	70	74	35	79	80	78	45
座號	25	26	27	28	29	30		
成績	47	33	84	75	85	89		

老師若想瞭解成績分布情形，可以把成績整理成如下的統計表。

表 2、三年一班各組成績次數表

分數	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
人數	1	4	8	11	6

全班人數 = 30

習慣上，0~20 這一組是指成績大於或等於 0 分且小於 20 分的學生；

20~40 這一組是指成績大於或等於 20 分且小於 40 分的學生；

40~60 這一組是指成績大於或等於 40 分且小於 60 分的學生；

60~80 這一組是指成績大於或等於 60 分且小於 80 分的學生；

80~100 這一組是指成績大於或等於 80 分且小於或等於 100 分的學生。

表 3、三年一班各組成績相對次數表

分數	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
人數	0.03	0.13	0.27	0.37	0.20

表 4、三年一班各組成績累積次數表

分數	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
人數	1	5	13	24	30

表 5、三年一班各組成績累積相對次數表

分數	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
人數	0.03	0.16	0.43	0.80	1.00

這樣，老師知道有將近一半的學生成績不及格。也知道，例如：全班有 13 位，或 43% 的同學數學需要再加強。

- 統計學中，條形圖分為長條圖、直方圖兩大類。長條圖適合用於表現離散的資料，因此各長條以適當的距離間隔來表現資料的離散性；直方圖則適合用於表現連續的資料，因此各長條間並無間隔，且資料應依序排列。
- 國中階段統計的教學宜以有序且具連續性的資料為主，統計圖形則以直方圖、或折線圖為主。
- 「次數圖」及「相對次數圖」之製作皆依各組之順序在橫軸上標示其位置，再依各組的次數或相對次數，來製作直方圖，則如圖 1 的次數圖即以直方圖的樣式來呈現，而「相對次數圖」是將次數圖之次數改為相對次數(如圖 2)。

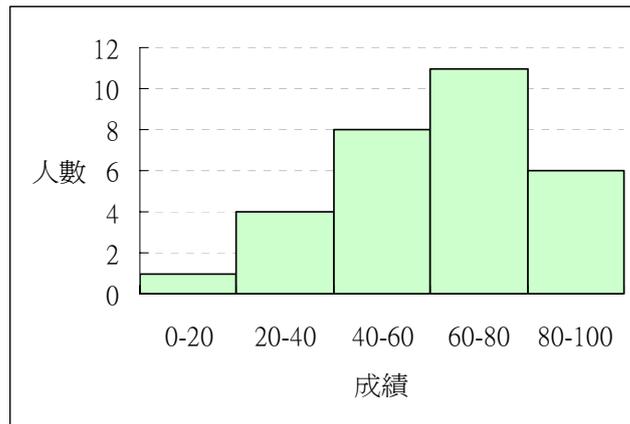


圖 1、成績人數直方圖

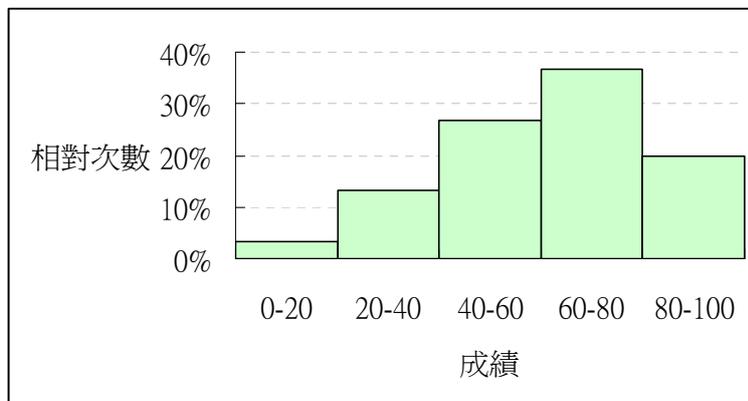


圖 2、相對次數直方圖

- 各圖形亦可以折線圖表示，習慣上，製作次數折線圖或相對次數折線圖時，會以組中點(各組中點)來代表該組之資料值(圖 3 和圖 4)而在製作累積次數折線圖，或累積相對次數折線圖時，則常以各組的右端點來取折點，這樣才符合累積的意義(圖 5 和圖 6)。

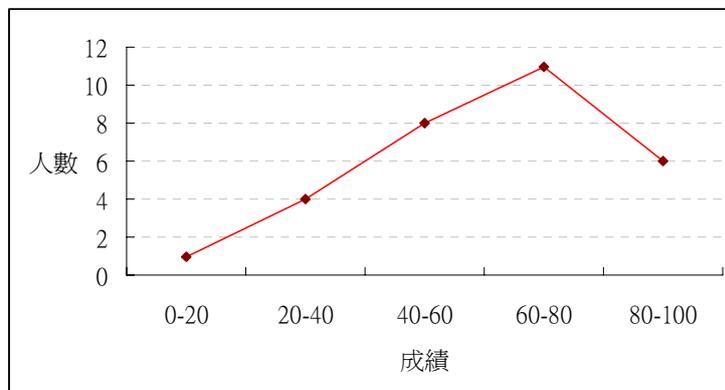


圖 3、三年一班各組成績次數折線圖

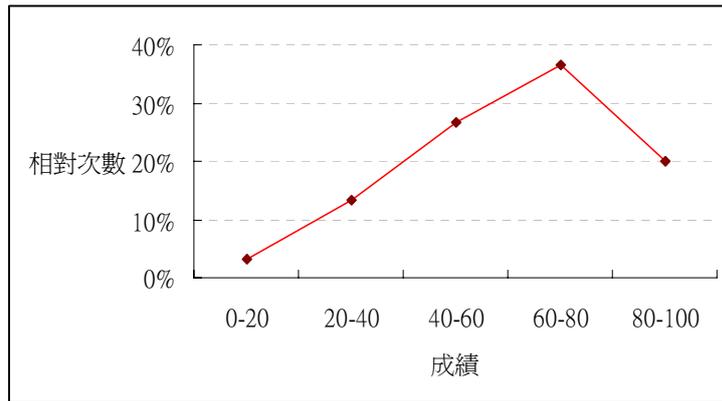


圖 4、三年一班各組成績累積相對次數折線圖

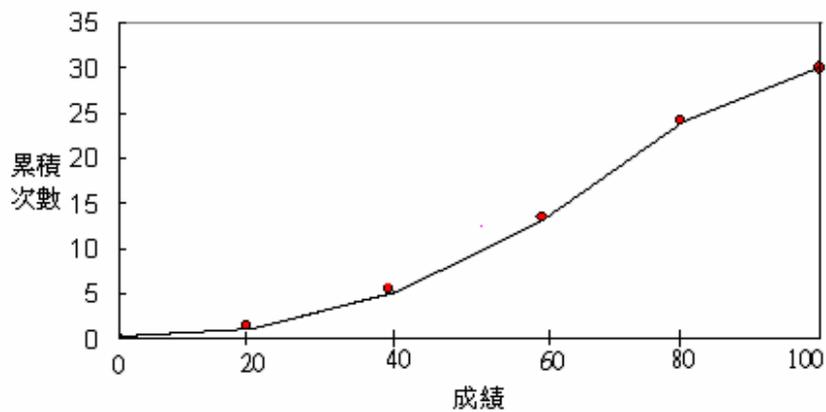


圖 5、三年一班各組成績累積次數折線圖

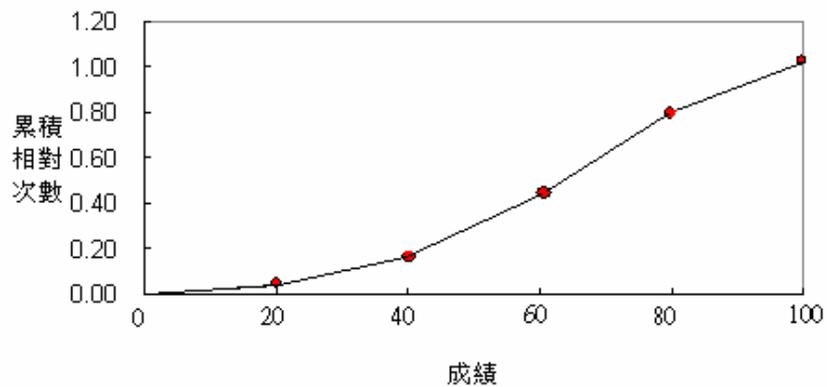


圖 6、三年一班各組成績累積相對次數折線圖

- 在沒有特定的使用目的限制下，習慣上，組距的大小可以(最大值－最小值)÷(組數)來訂定。重點是，統計圖表要能協助使用者清楚呈現他想表達的資訊。

9-d-02 認識平均數、中位數與眾數。

D-4-01

D-4-03

- 說明：
- 平均數、中位數與眾數均可以某種程度地表示整筆資料集中的位置。
  - 平均數是指所有資料值的總和除以總次數；中位數是將資料排序後，前後各切成一半的中間位置資料值；眾數是次數最高的一個或一組資料值。
  - 能認識平均數、中位數與眾數在不同之分組狀況下的可能差異。
  - 平均數、中位數會使落在兩邊的資料呈現出某種「平衡」狀態。平均數是量的平衡，中位數則是個數的平衡，而眾數是落在出現次數最高的位置，與平均數、中位數有差別。平均數對於資料中有特別大或特別小的數特別敏感，中位數則不受影響。以 { 1, 2, 3, 4, 5 } 和 { 1, 2, 3, 4, 500 } 兩組資料為例，第一組的平均數、中位數均相同，但第二組的中位數不變，平均數則為 102，而以三年一班數學成績為例，平均數和中位數很接近。
  - 知道當資料值平移或乘上某個不為 0 之定數時，眾數、中位數、平均數皆會相對應變化。例如：美國某城市的華氏氣溫資料，在轉換為攝氏之後，其眾數、中位數、平均數的變化。
  - 知道將幾份同類資料合併時，平均數的計算方式，並知道這只和各資料次數占總次數的相對比例有關。

9-d-03 能認識全距及四分位距，並製作盒狀圖。

D-4-02

D-4-03

- 全距是最大數與最小數的差，全距大通常表示資料較疏散，全距小則是指資料較集中。以三年一班數學成績為例，最大數與最小數分別為 89 與 5，所以全距為 84。
- 認識第 1、第 2、第 3 四分位數(可記為  $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$ )的意義，知道如何運用資料的相對累積次數分配表來找出  $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$ 。知道第 2 四分位數即中位數；四分位距則為第 3 四分位數與第 1 四分位數的差，即  $Q_3 - Q_1$ 。以三年一班數學成績為例， $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$  分別為 45、64.5、78，則四分位距為 33。
- 能理解當存在少數特別大或特別小的資料時，四分位距比全距適合來描述整組資料的分散程度。
- 我們可由四分位距和全距間的差異性來描述整組資料的分散程度。以三年一班數學成績為例，由圖 7 的盒狀圖我們很容易看出資料集中在  $Q_1$  到  $Q_3$  附近。我們也可以盒狀圖，如圖 8，來分析幾組資料間的關係。

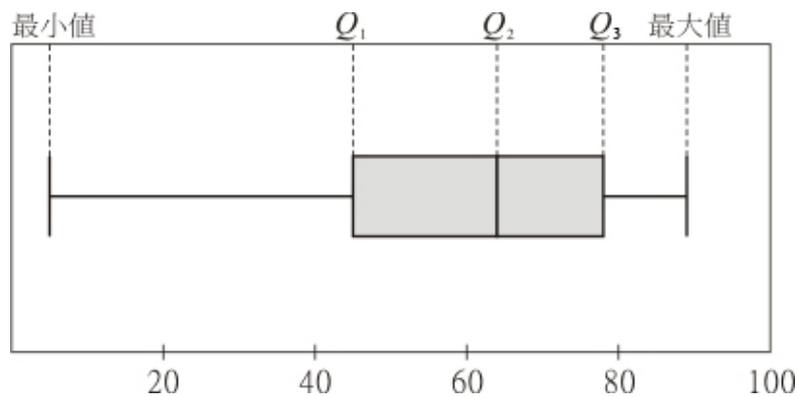


圖 7、三年一班成績盒狀圖

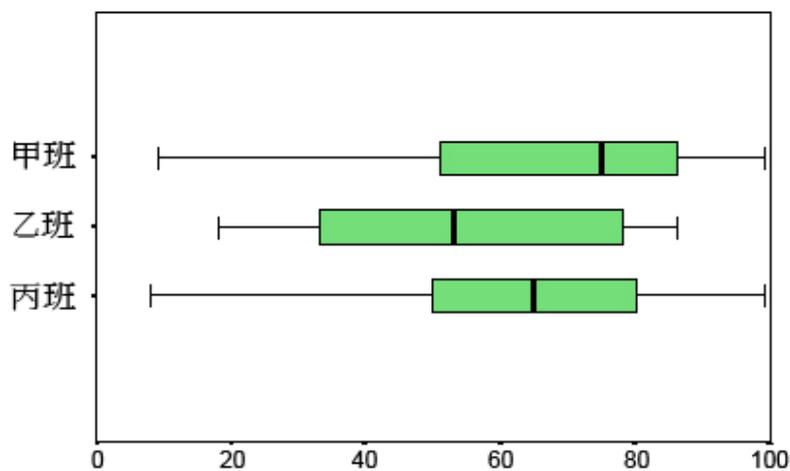


圖 8、數學成績盒狀圖

- 關於四分位數的定義，一般並沒有統一的取法，很多處理資料的統計軟體所用的四分位數定義也不一樣。因此學生應先確切學習取四分位數的原理，再學習可能的算則。為求整體一貫，應優先教導能將第 1 四分位數等同於第 25 百分位數(9-d-04)，第 3 四分位數等同於第 75 百分位數的算則，再將其他方法視為方便法。
- 能引導學生使用電腦軟體，如具電子試算表或基本計算功能的程式語言，處理較大筆資料的計算，也可以附加的繪圖功能來製作統計圖形；也可引導學生使用電算器，處理數量不太多的資料(如例 1)的統計量。

9-d-04

能認識百分位數的概念，並認識第 10、25、50、75、90 百分位數。

D-4-03

- 說明：
- 百分位數和中位數、四分位數一樣，可以表示某資料組在總資料中的相對位置。學生應能自資料之相對累積次數分配表求出百分位數。

- 知道百分位數通常用於分析總次數多的資料，避免在資料數少的例子中，做百分位數的教學。
- 知道第 25 百分位數相當於  $Q_1$ ，第 50 百分位數相當於中位數，第 75 百分位數相當於  $Q_3$ 。
- 知道第 10 百分位數與第 90 百分位數可以作為與大部分資料偏離的指標。例如：九十年臺閩地區十五歲男生身高之第 10 百分位數約為 158 公分，第 90 百分位數約為 176 公分。這表示約有 10% 的十五歲男生，身高矮於 158 公分，另外約有 10% 的學生身高高於 176 公分。
- 國中統計之教學首重原理的理解。由於資料眾多又離散，許多統計量都只有近似的意義，教師在評量時，應儘量避免在不精確的資料情境下，詢問需精確回答的問題。

9-d-05 能在具體情境中認識機率的概念。	D-4-04
------------------------	--------

- 說明：
- 生活上，一般人經常要做決策，處理相當多不確定性的事務(緣於本質上隨機的原因、結構複雜的原因、或資訊不足的原因)。雖然在人類史上，使用清楚的數學方法來處理不確定性的概念，是相當晚近的事情，但是機率論及其在科學上的應用已經非常重要，因此學生應慢慢開始學習。
  - 由於機率概念的掌握並不容易，因此應先從最清楚、易學習的機率觀—古典機率開始學習。在適當的脈絡中，假設每一基本事件出現的機會相同，並由此定義機率的意義與計算方式，同時，學生應知道機率等於 0 與機率等於 1 的意義。
  - 所謂適當的脈絡，通常指有對稱性的情境(例如：銅板、骰子、撲克牌、抽球等)，此時學生直觀上容易相信每一基本事件出現的機會相同，並能由直觀來輔助學生學習機率的基本意義。
  - 可引入樹狀圖的工具，來協助計算所有可能的事件。例如：「擲一粒公正的骰子兩次，求出現點數和為 10 的機率。」此時需先能計算擲骰子兩次會出現的所有可能性。
  - 從重複實驗的機率計算中，學生應慢慢體會隨機獨立的意義。古典機率的計算雖然是基於公平原則，但不表示投擲一銅板，若第一次出現正面，第二次就要出現反面。學生最後需能體認，即使投擲一銅板已出現 100 次正面，下次投擲仍然有一半的機會是正面，一半是反面。
  - 應能恰當處理統計資料的相對次數本身所具有的機率意涵，例如：「在全班學生中任意抽一名學生，則其成績在 80 分以上的機率是多少？」，可以使用最有彈性的「抽球」模型來，將原來的統計資料轉

換成抽球的問題來說明。

- 若教學時數足夠，可以再說明簡單的統計機率概念。可先介紹丟擲時有兩態(如圖釘、圓錐、爻杯)的物體，並讓學生理解，由於物體不對稱性，因此各態出現的機率通常並不是 $\frac{1}{2}$ 。並告知學生如何利用重複試驗的方式，估計機率大概是多少，並讓學生能初步體認，如果試驗越多次，所獲得的機率資訊越可靠。

## 附錄二 五大主題說明

本附錄包含「數與量」、「幾何」、「代數」、「統計與機率」和「連結」等五個主題的說明，其內容包含：主題的理念、目標、重要概念、教學注意事項等。

### 1. 數與量

數與量在國民教育的數學課程中具有主要的地位，其主要概念的形成與演算能力的培養均奠基於國小階段，而在國中則延伸至負數和根號數的教學。因此，這一主題的學習可分為國小(一年級至六年級)、國中(一年級至三年級)二階段來說明。

#### (1) 國小階段(一年級至六年級)

國小數與量的範圍較大，因此分為「整數」、「量與實測」、「有理數」和「估算」等子題。

##### A. 整數

在國小階段，整數指的是自然數和0，所處理的是離散量的計數與計算。整數教學是國小數學的核心課程之一。課程安排應善用學生在入學前，已有的各種計數與解題能力，在既有的基礎上恰當地統整、釐清並擴張其經驗。

整數計算是一切數學學習的基礎。在教學中，學童經由活動、情境掌握計算的意義，藉著各種例子體驗計算的規則與策略。流暢的計算能力，有如語文學習中，基本的文字駕馭能力，不僅可以內化學童的數字感，並且是日後(國、高中)學習抽象運算及形式推導的基礎，這樣的能力固然是學習科學所必須，也是能夠有效處理日常生活的基本能力之一。

培養流暢的計算能力，應注意以下幾點：

- a. 計算程序的發展有其嚴格性，必須每個環節都能掌握，才會有紮實的計算能力。
- b. 在理解運算意義時，固然可以多樣舉例，但在學習計算程序時，則可運用恰當的例子(如幣值)，讓學生能順利掌握計算的方式。
- c. 計算程序本質上較為抽象，也因此才能應用於各種不同的情境，在理解各種運算的意義後，就應該慢慢脫離情境，做各種計算的練習。
- d. 計算的練習必須要多樣化，讓學生能從各種角度熟練四則運算的性質與程序。
- e. 學生應該養成簡單心算與驗算的習慣。
- f. 計算時能運用四則運算的性質，協助心算與估算，簡化計算、驗算與解題。

國小整數教學的課程目標在於：

- a. 從計數開始，學習位值的約定與換算，並在演算中，逐步熟悉，最後能掌握大數。
- b. 在二年級下學期，理解算術的樞紐—九九乘法，作為日後所有計算的基礎。

- c.到四年級時，能夠不拘泥於位數，熟練加、減直式計算，五年級則熟悉乘、除直式計算。
- d.五年級時熟悉整數四則混合計算與相關運算律。
- e.在五、六年級時，理解基本的因數分解與質數概念，並與分數運算相互加強，建立完整的數字感。

## B.量與實測

除了日常生活的重要應用外，量的學習也是學生學習連續量的入口，可以與有理數的學習相互加強。其中又以長度的教學最為關鍵：長度是學生保留概念最早成熟的量，也是最容易操作的量，長度的測量是分數與小數教學的自然入口，同時也是學習數線的典型模型。經由長度之經驗，學生學習如何在數線上做比較與加減運算，由此將整數與有理數徹底整合，作為日後學習負數、實數、幾何的基礎。

量與實測是國小數學的核心課程之一，其中量包含長度、重量、容量、時間、角度、面積、體積等生活中常用的七種量。其中長度、容量、角度、面積、體積屬於幾何(視覺)量。

國小量的學習，原則上要經過初步認識、常用單位、單位換算、量的計算的階段，尤其要注意在應用問題中，恰當的和分數、小數結合。

- a.初步認識：在初步階段，學生應從日常情境中認識該類量的意義，並能做簡單自然的度量，並進而體認該類量比較大小的意義。
- b.常用單位：認識某類量之常用單位，並能運用此單位，做量的比較、加、減、乘、除。
- c.單位換算：在測量時，首先能用複名數來描述測量結果。然後再利用單位換算的約定，來進行換算。
- d.量的計算：結合直式計算、複名數、單位換算的經驗，解決日常生活中量的計算問題。

不過各種量的初步認識階段，除了長度量最為標準之外，仍應依量的特性，而做不同的處理。

角度：角度量雖然是和長度類似的一維量，但是其引進卻和面積經常混淆，教師應小心處理。

容量：此量的初步認識雖然和體積相關，但是在更進一步的教學應用中，則變成和長度的一維量類似（如量杯），教師應特別處理。

面積、體積：這兩種幾何量牽涉到複雜圖形的認知困難，前期的複製與比較均不好處理。教學宜從較直觀或簡單情況的大小判斷開始，然後直接引用最易處理的正方形或正方體為單位，從並排或堆疊的經驗中，對面積或體積蘊生更有意義的量感。

重量：重量不是視覺的幾何量，牽涉到身體的體感，即使是左右手持重物比較，也不是真正的比較。因此宜從器械如天平的學習入手，由對稱的直觀知道天平兩邊重量比較的意涵，並以此來完成重量的初步比較。其次，再由器械如公斤秤，學習重量的單位。

時間：由於時間無法複製與保留，因此除了「同時同地」進行事件時間長短之比較外，不存在真正的比較。所以時間量的學習，和重複規律計時的標準器械(如鐘表)的使用，有非常密切的關係。學生時間量的

學習，應從器械入手，透過約定單位的學習，再慢慢掌握時間的量感。

另外，量的教學還有幾個教學要點：

- a. 在學習常用單位時，應先從最常用的單位先學起，和生活情境相結合。之後再隨生活經驗的擴充，延伸到更大或更小的單位。
- b. 學習最常用的單位時，要從實測來培養量感，並養成基本的估測能力。
- c. 常用單位，一方面遵守中央標準局之約定，另一方面也鼓勵教師，配合生活情境，自行補充其他日常生活常用的單位(如：米、cc、ml、坪、台斤等)。
- d. 長度、面積與體積作為量來教學，經常與幾何主題有許多重疊之處，因此有一些指標是量與幾何共用。

### C. 有理數

有理數是小學的核心課程之一，也是小學數學教育中，最有挑戰性的教學主題。有理數教學的困難主要在於：它牽涉兩種非常不同的表現形式—分數與小數；它的應用課題很廣—平分、測量、比例、比率、比值、部分/全體；學生較缺乏有理數的前置經驗，日常生活中的有理數情境也比整數少；分數的形式是學生首次碰到兩整數並置的約定，一方面分數計算的熟練，仰賴整數的精熟，另一方面整數計算的經驗，有時反而會造成有理數學習的錯誤；甚至，有理數的概念理解與形式程序的學習，有時會互相干擾，然而有理數數感的建立，卻又依賴兩者在反覆應用練習中，彼此增強。

什麼是穩當的有理數教學，並無定論。但是基本的共識是，學生需要較長的時間，來學習掌握有理數的概念；不論是先形式程序，或者先概念理解，兩者都必須不斷互相支持；在有理數教學中，必須將材料做適當的安排，先從較容易的平分或測量入手，而將其它的應用課題，作為錘鍊有理數數感的課題；運用數線作為模型，將自然數、分數與小數結合在一起，匯聚成「數」的觀念。

小學的有理數教學，必須釐清、練習並連結下述有理數的四種意涵，最後歸結成日後數學學習中，有理數最核心的意涵—「除的意涵」：

- a. 平分的意涵：學生在低年級認識人我分際之後，就會發展出強烈的公平感，因此從平分入手學習分數，是一條比較容易的途徑，也比較容易化解分數學習中常見的認知衝突。
- b. 測量的意涵：長度測量是低年級就發展的數學課題，在以個別單位度量長度，為了解決剩下部分的「餘數」約定時，就能同時發展小數與分數兩種課題。由於單位的強調，測量是調和「部分/全體」的意涵與帶分數認知衝突中的重要工具。
- c. 比例的意涵：比的原理，是一種微妙的平分方式，因此學生比較容易接受。即使學生尚未學習比例式，透過比的方式，仍然可以協助學生解題。最後再透過比值的引入，一貫地解決比例的問題。
- d. 部分/全體的意涵：部分/全體雖然是分數的重要意義之一，但是由於概念較為抽象，而且真分數的暗示過深(全體為 1)，可能造成假分數或帶

分數學習上的困擾，必須透過單位的強調來解決其認知衝突。

另外，建議在分數教學的早期，可以使用單位分數為計數單位，教導假分數的約定與計算，這能與自然數、測量單位的學習，相互加強。

#### D. 估算

估算是過去數學教學中，較被忽略的課題。一般來說，數字感較好的學生，通常都能夠使用估算的技巧，來協助計算、驗算與解題。而經由估算課題的教學，也更能促使學生對數學概念、程序計算、解題三者間的連結，有更深入的理解。

估算在國民教育中可粗分為離散量的估算(自然數四則運算的估算)與連續量的估算。前者的教學，應在學生已經能掌握確算後再進行。而後者的教學，應透過測量時量不盡的正常情境，與小數的教學共同開展，認識小數之細分與精確度的要求乃是一體的兩面。最後，結合兩者，養成掌握誤差、施行估算的能力。

估算的教學，可以先在計算與驗算中強調，讓學生能對不合理的答案，透過估算剔除；然後是，能判斷應用問題對答案精確度的要求，並藉由過去的解題經驗，發展正確的估算策略；或者是，能針對問題與解答，發展估算策略，驗算解答的合理性。要注意的是，估算屬於較高層次的數學能力，學生必須先對所使用的概念程序與問題情境有相當的理解，才能恰當地估算，進而能正確判斷估算的時機與精確度的要求。

國小估算教學，要特別注意評量的問題。切忌因為強求估算，禁止學生使用正常計算。教師應在評量的問題上下功夫，讓問題本身暗示估算的好處。

例：在計算  $75 - 27$  時，請學生從 20, 50, 70 三個答案中，選擇最合理的答案。

例：小明有 25 元，小華有 40 多元，兩個人想要合買 80 元的巧克力，可能嗎？

### (2) 國中階段(一年級至三年級)

數與量的學習是整個國中數學的基礎，也是學習的第一個重點。對數與量有充分的瞭解與掌握之後，才可以進一步的學習其它的學習領域(代數、幾何、統計與機率)。

#### A. 負數

在七年級時，數與量的學習乃是國小階段的延續，但是在概念與操作的層次上則有所不同。七年級引入的新數是負數，把自然數與正有理數的範圍推廣到整個整數及有理數。負數的引入可藉由日常生活中「賺賠」、「輸贏」、「進貨出貨」等相對經驗來引入，延伸學生在小學已經建立的數量應用經驗，由此瞭解相反數、絕對值、以及一般的四則運算。

數系包含負數之後，整個運算律的形式可以獲得大量的簡化，學生在七年級，應該要知道乘法和除法是同一種運算，加法和減法是同一種運算，由此知道小學許多運算律，其實本質上都一樣(例如：加減混合、連減其實都是連加的表現)。

負數的學習最後要總結成日後常用的幾何模型—數線，擴張國小的數線經驗，並作為日後學習直角坐標的基礎。學生應知道坐標的意義，並知道如何在數線上呈現絕對值、相反數、比較與運算的幾何意義。

最後，則介紹在自然科學中非常重要的科學記號表示法，一方面作為負數的一種應用，另一方面也讓學生明白數量級的概念。

## B.比例關係

比例關係是日常生活與自然科學中經常用到的數量關係，本身有這非常豐富的性質，可以視為乘除關係的重要延伸。比例關係有兩種看法：一是倍數相同的觀點，一是比值相等的觀點，兩者對於解決實際的應用問題都很重要，學生必須熟稔兩者，才算是真正掌握了比例關係。

比例關係的具體表現是比例式，由倍數或比值的觀點，都可以歸結到「外項相乘等於內項相乘」的結果。在比例的計算中，可以自然的引入繁分數的記法與計算。

比例在國中階段有兩個延伸課題，一個是連比，可以使用倍數關係來解釋，在幾何中可以應用到相似三角形或多邊形的判別；一個是常用的正比與反比的關係，這又可以連結國中另一個重要課題，作為函數關係的特例。

## C.根號數(方根)

由畢氏定理或面積與邊長的關係，可引入新的數—根號數或稱方根。二次方根的學習對學生而言，是一個全新的經驗。它不但是一種新的數，而且它是以長度量的方式來引入(不像有理數、負數用數的方式來引入)；而根式的計算又和代數運算(尤其是不定元的演算)的成熟度有莫大的關係。

因此在國中階段，介紹方根時有幾個要注意的地方：

- a.至少要合理說明 $\sqrt{2}$ 不是小數，甚至不是分數。讓學生知道他真的在學習一種新的數。
- b.需仔細以幾何的長度量說明根號數作為一個「數」的依據，讓學生能夠將簡單的根號數標在數線上，而且能用逼近的方式掌握根號數的大小，這些都是要讓學生對根號數產生數感的方式，避免學生將根號數當做抽象的代數符號。
- c.利用簡單的逼近法處理根號數時，位數不要太多，重點在於學生能掌握概念，而不是複雜的運算。
- d.發展根式的運算宜分成兩個階段，第一階段清楚處理單純根號數的化簡；第二階段再處理根式的運算，此階段學生必須對代數演算有相當的成熟度，尤其是分配律。

## D.數列與級數

在數列與級數方面，應先教導學生觀察日常生活中有趣或具有規則性的離散量模式(即數列)，進而利用歸納的思維，整理出它們的規則性。學生可以先觀察相鄰兩項的關係，進而掌握寫出數列的規則；在較簡單的例子，也可以要學生以數學符號(代數形式)表示數列的一般項。無明顯模式的資料數列，將在九年級統計與機率中處理。

國中要詳細處理的數列與級數是等差數列和等差級數，由於符號的運用繁多，教學上要先清楚交待等差數列與級數的基本意涵，避免學生迷失在複雜的抽象符號中。

## 2. 幾何

人是視覺的動物，為了生存，人類天賦的「形」或「幾何」直覺，遠比一般人所想像要豐富堅實。典型的視覺影像處理——如直線、圖形的邊緣、平行與垂直、對稱、全等操作、放大縮小、圖形識別等，對人類大腦輕而易舉，卻是電腦處理的重大挑戰。因此，幾何不但是數學教育中的重要課題，而且也是較易學習、較有趣的教學單元。

### (1) 國小階段(一年級至六年級)

幾何形體的理解包含察覺、操作、構造、推理證明等諸面向。小學教師在從事幾何教學時，必須避免自己歐氏幾何訓練的干擾，避免處處受制於定義的認定與邏輯順序。由歷史來看，人類是先由應用、操作、實踐中，認識各種幾何要素與性質，彼此之間並沒有一定的先後關係。歐氏幾何的價值，首先是對這些先民知識的歸類與整理，其次才是作為知識典範的演繹系統。

因此小學的幾何教學，可以參考幾何歷史發展的軌跡與學童認知發展階段，儘量讓學童發揮、拓展其幾何直覺，在操作中，認識各種簡單幾何形體與其性質，再慢慢加入簡單的推理性質與彼此之間的關係，為以後銜接國中幾何的教學，打下良好的基礎。

國小的幾何教學要點說明如下：

- A. 一年級到三年級：較強調幾何形體的認識、探索與操作，學生對幾何形體中的幾何要素，也許能指認，但尚不清楚其結構意義。
- B. 四年級到六年級：由於數與量的發展逐漸成熟，學生開始結合「數」與「形」兩大主題，學習運用幾何形體的構成要素(如角、邊、面)及其數量性質(如角度、邊長、面積)來描述特殊幾何形體的特徵與性質。

### (2) 國中階段(一年級至三年級)

國中幾何教學的目標，首先在於提供學生日後有用的核心幾何知識，其次是提供豐富的背景，可以展示數學推理證明的過程與威力，而推理能力的培養正是國中數學教育的重點之一。

國中的幾何學習，乃由直觀、歸納轉入幾何推理與證明。幾何教學起初仍然以學生的幾何直覺經驗為前導，但開始強調幾何觀念的明確定義，及幾何相關量的計算，甚至代數演算，學生同時應開始學習閱讀幾何性質的嚴格推理，最後，再學習自己動手寫出較短的證明。這對於日後數學邏輯推理能力及以抽象為主的高中數學學習皆很重要。

不過，傳統教學上幾何和證明綁得太緊的現象，產生了兩個問題。首先是以為學習幾何等於學習歐氏幾何證明。但如前述，國中的幾何學只是提供展示證明過程的背景，幾何學仍然有本身的核心觀念，超越於形式的證明之上。如果過份注重瑣碎形式證明的結果，甚至以為證明就是國中幾何的全部，反而無法完成國中幾何的教學目標。我們也要提醒教師，歐氏幾何本身雖然有相當多美麗的性質，卻不等於國中幾何教學的目標，教師切勿過度延伸，補充過多卻無用的幾何材料。

傳統教學上幾何和證明綁得太緊的第二個問題是，以為談證明就只能在幾何教學中談。但如前述，幾何的確提供了豐富的背景，來展示證明的過程，但這不表示在國中其他數學教學時，就可以忽略嚴謹性。事實上，推理能力的培養，應貫徹在國中的整個數學教學中。

國中階段的幾何課程的核心概念是畢氏定理、全等、相似、對稱，並將之應用於常見的幾何圖形如三角形、四邊形、多邊形、圓等，而得到許多特殊圖形上的個別性質。

我們特別強調下面幾點：

- A. 七年級需要學習一次函數或二元一次方程式的圖形是直線。在繪圖上，學生固然直觀的相信這是一條直線，但是通常教師在這個階段並無法做合理說明。

這個尷尬，是因為這正是學生從經驗學習走向推理學習的過渡階段，我們要到八年級後半，才將直線作為一個嚴格推理的主題，而到九年級處理相似概念時，才有足夠的推理工具來完整說明。這個課題本身是代數和幾何連結的具體範例，能夠讓學生學習數學知識建構的完整性，也可以作為高中解析幾何的前置經驗。

另一個類似的例子是畢氏定理的證明，也需要在完整的三角形全等定理學習後，再做一次說明。

- B. 對稱性是幾何學習的核心概念，對稱性的觀察既直觀、有效率、又深具威力，各種對稱圖形(無論是三角形或多邊形，還有圓)永遠是幾何學習中的重要對象，而對稱性的深化更是日後幾何和其他數學領域、科學領域結合時的重要橋樑。

線對稱概念是最基本的對稱，應該在國中時期，讓學生充分認識並學習如何應用線對稱的想法於思考、解題與證明。例如：所有等腰三角形的基本性質，只要對稱性便能充分說明，若學生能學習觀察到這一點，將可以簡化幾何的學習，還能掌握重點。

- C. 縮放與相似是相關的概念，學生應確實理解幾何圖形在縮放前後的變化性質(例如：直線變到直線；線段長成比例；角度不變等)，並知道若一圖形縮放後和另一圖形全等，則此兩圖形稱為相似。這麼一來，相似的概念可以當下直接用到所有幾何圖形上。

傳統教學上，通常只是很快將放大與縮小作為動機後，就開始進入三角形的相似性質，導致許多學生進入高中大學後，談到相似就只記得零碎的性質如三角形 AA 相似性質等，無法對相似有一個更整體的掌握，因此綱要特別要求修正這項缺失。

### 3.代數

#### (1)國小階段(一年級至六年級)

在民國 82 年版的「國小數學課程標準」中，代數的題材比較少，較容易造成學生進入國中後學習的不適應。這次綱要修訂在國小高年級部分，加入一些題材：包括運用未知數做數學表示式、理解等量公理等，希望能協助銜接國中的代數教學。

由於算術的學習仍然是國小數學學習的主體，所以在解題策略的發展上，應儘量讓學生做多方探索，避免讓代數工具過早抑制學生的想像力。因此國小的代數主題，幾乎都是為了國中的代數學做前置鋪陳，關於四則運算符號與性質的指標，都只是檢查性的指標，在教學與課本的安排上，應併入數與量的教學中，不該獨立成特別的教學單元。

國小代數題材安排特色：

A.能理解常用算術符號的使用方式，並用來列出日常問題的算式，以進行解題。

例：關係符號如： $=, <, >$ ；運算符號如： $+, -, \times, \div$ ；未知數符號如： $\square, \text{甲}, \text{乙}, x, y$ 。

B.從最基本的加減問題開始，詳細安排兩步驟至多步驟的教學次序，並依序安排四則運算規律的教學，從整數到分數、小數，在具體情境中，瞭解各基本運算之性質，並應用於不同教學目標的教學。

例：加法交換律、結合律、乘法交換律、結合律、乘法對加法的分配律。加減互逆、乘除互逆。  
 $=, <, >$ 的遞移律。

C.從最基本的加減問題開始，到四則混合計算，讓學生最後能獨立於生活與具體情境，在形式與程序上，流暢進行整數計算，其中包括併式演算的能力，並活用運算律於簡化計算。橫式演算與運算律都是國中代數符號演算的重要基礎。

D.協助發展對數學問題之解題策略。

例：代入法、加減互逆、乘除互逆，反向思考解題、比例推理解題、比值解題，更複雜之混合策略解題(如傳統應用問題)。

E.能理解等量公理。

#### (2)國中階段(一年級至三年級)

綱要已在國小鋪陳代數預備經驗，到國中引入「以符號代表數」的想法，正式進入代數學習的世界。包括代數演算、運算律、解方程式、函數關係以及和幾何連結的直角坐標。

教師應強調，國小解決應用問題(例如：線段圖方法)和國中解應用問題(方程式)的差異，以及抽象代數方法的普遍性與優越性(例如：國小許多類問題，從解方程式的觀點，可能都是一元一次方程式)。另外，代數的能力包含邏輯與符號的推演，可培養學生的抽象思考能力。即使是幾何推理的素材，也經常需要藉由代數方法來導出新觀念或新性質。

國中代數題材安排：

A.以符號代表數

以符號代表數，是學習代數學的關鍵與難關。這裡有四個層次：首先是國小綱要已要求使用符號來記錄常用的公式，由熟悉的公式入手，可以減輕學生對抽象符號的恐懼；其次，是用符號來表示運算律(包

括指數律)，學生在此可體認符號簡化並釐清數學敘述的威力；第三，是解題時，用符號來表達問題中的數量關係，作為解方程式的準備，這裡符號所代表的是特別的數，而不是一般的數，因此認知上更困難；最後，是用一些符號來表示一般的數量關係或函數關係，這不只是用符號代表數，而是用符號來表示關係，屬於更抽象的層次。

依照此認知難度，綱要(建議)將第一層次放在國小高年級，第二層次擺在國一初期，第三層次擺在國一後期解方程式的單元，第四層次則放到國一下中的比例與函數單元。另外，教師應清楚解釋代數表示式中的常數部分和變數部分的區別(例如：指數律、多項式)。

#### B.代數演算與分配律

以國小高年級的橫式計算與化簡為基礎，國中要開始學習代數演算，作為所有代數計算的基礎，其中最關鍵的就是分配律。在併項演算、乘法公式(包括和平方公式、差平方公式、平方差公式)、分解因式、配方法這些重要的代數課題中，使用分配律的成熟度都是學習的核心。事實上分配律也是根式運算的重要基礎。

我們要特別指出配方法的學習，是國中代數教學的重點之一，這是因為處理二次形式的問題，遍及高中(大學)數學的代數和幾何題材。

#### C.解方程式

解決應用問題是數學教育的重要目標，而解方程式則是解題活動中，既重要又較有系統的一環。整個國中的代數教學，應養成學生解題的習慣：觀察題意、以符號將問題中的數量關係列成方程式，最後在解出方程式，並觀察解是否符合題意。

國中會遇到的方程式，包括主要的一元一次方程式、二元一次方程組、一元二次方程式，以及較次要一元一次不等式與二元一次方程式。其中最根本的解方程式原理為等量公理，二次方程式尚牽涉到分解因式與配方法的想法。要讓學生確實認識配方法的想法對解二次方程式的重要性，而不是死記公式法。

另外，學生應有機會針對同一問題(例如：雞兔問題類)，觀察以國小方法解題、以一元一次方程式解題、以及以二元一次方程組解題的區別。讓學生思考這些方法的差異。

#### D.函數關係與函數圖形

由國小至國中，很多常用的數量關係最後會總結為函數關係，學生應理解當一組數  $x$  能決定另一組數  $y$  時，就決定了一種函數關係。

由於函數關係較抽象，教學上應避免在一開始就引入較抽象又沒有用處的  $y=f(x)$  符號，也應避免做過份抽象的定義。只要學生能從個例中，先熟悉常數函數、一次函數與二次函數的種種計算、性質與圖形，可以到國中最後再總結這些經驗，引入  $y=f(x)$  的符號。

理解函數的重要環節是看到坐標平面上的函數圖形，另一方面，要能有效率繪製函數的圖形，則又需要更深入理解函數的性質。繪製函數圖形，通常先從折線圖入手，畫出大概的圖形，然後讓學生知道代點畫法的侷限(以二次函數圖形為例較恰當)，引出學生學習函數性質的動機。

#### 4.統計與機率

數學上一般所學習的數、量、形的知識，都是確定的知識，但是生活中有相當多的問題，牽涉到龐大的資料或甚至含有某種不確定性，需要學習其他的觀點，才能處理。

龐大紊亂的資訊通常需要先對資料進行分類整理，再計算某些統計量，才能對資料的結構有初步的理解；而含不確定性的問題則需要學習機率論的知識，由於機率論的概念不容易掌握，因此學生通常先由較直觀、簡單的古典機率觀點先學起，然後再簡單介紹統計機率的觀點，處理更一般的問題。

在學習統計的知識時，應先從生活經驗和環境取材，從學生感興趣的主題出發，先學會如何將簡單的生活資訊分類、計數，並依問題的目標，製作恰當的統計圖表，計算常用統計量來呈現這些資訊，以達到釐清結構或與他人溝通的目的。

國中機率論的學習，只在國三階段做最基本的介紹，其中以古典機率的教學為主，最後可帶入部分統計機率的主題，作為高中數學學習的前置經驗。統計和機率的學習，大致依下面的階段來學習：

- (1)三年級之前：先藉由簡易表格的製作，協助學生建立資料的整理與分組的概念，進而練習報讀常見的一維表格和二維表格，說明其內容，並能回答與該資料有關的問題。此階段的問題應與「數與量」的教學做連結。
  - (2)四年級：以簡易幾何圖形和二維表格報讀的前置經驗，開始引進長條圖與折線圖兩種統計圖表的教學，學習報讀生活經驗中的資料統計圖與折線圖，在折線圖的教學中，應使用有序的資料，讓學生體認折線的意義。這階段的教學尚不宜引進百分率、小數或分數來表現資料的量。
  - (3)六年級：由於學生相關「數與量」的學習較成熟，因此可以開始學習自己整理簡單的資料，製作長條圖、折線圖。另外也可開始做圓形圖的報讀與製作。由於學生對相對比值、百分率已有概念，也可開始使用「頻率」的角度來整理統計資料，和比率或比值教學互相加強的。
  - (4)九年級：開始學習記述統計中的基本概念，以解讀(有序)資料的結構。一方面介紹整理原始資料時常用之表圖，如次數分配表、折線圖、直方圖(含累積次數)，另一方面，介紹常用統計量：眾數、中位數、平均數、四分位數、百分位數、全距、四分位距等統計量，來瞭解資料表現的特質。
- 機率的介紹，著重在古典機率的教學，最後可引入簡單的統計機率概念。

由於「統計與機率」主題在國民教育階段仍屬概念性的教學，較嚴謹的介紹將在高中、職階段的數學課程中實施。有關電算器、電腦的使用，應僅視為學習的輔助工具，避免在教學現場影響概念的教學。

#### 5.連結

##### (1)推理與證明

數學推理能力的培養是數學教育的重點之一。其實從小學的四則運算開始，學生即已進行有意識的推理活動。以 $3 + 4 = 4 + 3$ 為例，固然在進行運算之後，知道等號的兩邊都是7。但是加法的本質告訴我們總量與分量的聯繫正是交換律成立的基本原因，因而理解到應用交換律於計算是正確的。類似的操作在四則運算中處處可見。因此在小學的時候不

論是計算或是解答應用問題乃至於利用驗算來檢查答案的合理性都是推理學習的一部分。

如果學生在完成解題之後，嘗試說明每一個步驟的合理性，這個說明的過程，就是證明。

國中以幾何直覺經驗為前導，使用主體或觀念的明確定義，探索幾何現象並以推理驗證(包括與幾何有關的計算或代數演算)是教學的重點。其與小學學習不同之處主要是因為

A.由非形式化的推理逐漸提升至形式化的推理。

B.理解推理在幾何學習中扮演著提綱挈領的角色。

關於第 A 點，由於國中生較小學生年長，在語言及文字的呈現和對解題過程的反思都較成熟，因此應該學習如何將推理的步驟具體寫出，加強解題時的分析和溝通能力。

關於第 B 點，小學生在操作四則運算時，每一個步驟的合理性經常是透過算則或是經驗法則達成的定律，例如： $a + b = b + a$ ，但是對於幾何圖形所擁有的性質，開始學習時並不明顯，或是必須依賴特定的圖形，或是必須依賴操作的結果，例如：三角形三內角和等於 $180^\circ$ 這件事，並不顯而易見，又例如：等腰三角形兩底角相等，在呈現時，必須依賴一個特定的圖形，而非畫出所有的圖形，因此在建立定律的過程需要透過逐步的推理以建立一個普遍成立的陳述。又如畢氏定理，至少必須透過面積關係才能確認，並非經驗法則可以涵蓋。

但是就整體的學習而言，觀察、判斷、嘗試做出結論仍然是在推理之前重要的過程。推理並非盲目的邏輯推演，推理代表的是對現象合理的終極分析。因此在學習推理的時候應把握最基本的概念和定律。從定性和定量兩個基本的方向，分進合擊。定性的部分，包括對稱、全等、相似形，定量的部分包括面積公式，畢氏定理和相似形比例關係。

定性和定量之間的重要聯繫則是由整數量到一般實數量的連續化過程。透過連續化過程，建立了普遍的面積公式以後，可以由面積公式得出畢氏定理和相似形比例關係，而後者正是所有幾何定量的基本工具。

掌握學習時什麼是最基本的，或者說在學習中，能夠分辨主幹和枝葉的區別，正是幾何推理對其他學科學習的重要貢獻。

不過我們要提醒教師，推理能力的培養、證明的教學並不等於要求學生寫出冗長證明。國中的推理證明教學重點在於，學生應能領略證明如何使我們跳脫侷限經驗、延伸並確保思考正確性的好處，學習閱讀並反覆思考推理的過程，進而能夠養成自己言之有物的習慣，能夠辨認論證過程中容易犯的錯誤，最後再嘗試練習寫出較短的證明。

## (2)連結的諸面向

數學是依循嚴謹的邏輯程序而發展成的一個知識體系，它的特點在於能從問題的本質，探究內在深層的模式與結構，無論這些問題原來的表相有多大的差異。因此，數學敘述方式必然是一種抽象形式的語言，這種抽象性是一般人學習數學的最大障礙。

在國民教育的課程裡，如何協助學童超越數學形式規則的束縛，是教師教學與編寫教科書時該注意的要點。具體而言，課程的設計應注重數學各學習領域內在結構的互相連結，以及數學在生活情境、歷史、其它學科(如自然科學)的連結。

一般而言，傳統教學多少都會注意到數學內部的連結。舉例來說，傳統的國中教學方式，通常先代數後幾何，教科書編排方式是在代數主題的全部題材或至少絕大部份題材教完後，再轉到幾何主題教學。這種教學方式，並不是說學童在國一下及國二上學完代數後，在往後的年級裡不再學習和代數相關的數學。事實上，在國中的幾何課裡一般都有許多代數應用的安排，至少包括以代數符號和運算來表達幾何圖形中量與量的關係，例如：坐標平面上的距離公式、相似形與比例的關係等，並且希望透過對坐標平面的認識，建立坐標幾何的初步經驗。代數與幾何的關係，充分說明了數學內在結構連結的重要性。

傳統教材也經常處理數學和生活情境的連結，包括各式各樣的生活應用解題，畢竟讓學生覺得有用，本身就是學習數學的重要動機之一。事實上，在國小曾經出現過的許多應用問題，在經過重新分析之後，亦應在國中做第二階段的代數處理，以理解代數方法在解決問題中扮演的角色。這也是讓數學內容產生連結的方法之一。

但是傳統教材比較忽略兩個面向，一個是縱的、時間軸的歷史連結，另一個是橫向外部領域(尤其是自然科學)的連結。

前面提到，數學對人類文明的發展有重大的影響，從科學史來看，數學的發展和科學的發展密切相連，而且並不僅止於科技，在教學中恰當連結數學史與科學史的材料，往往能讓學生更理解數學概念發展的合理性。

數學和科學的聯繫在傳統教材中也不常提及。科學可以視為日常生活情境應用的深化，數學概念的發展相當多得力於科學應用的推動。如果失去這份聯繫，就會讓數學教師對數學知識的價值和重要性上做出失當的判斷，也經常使得數學教師視與其他科學的聯繫為畏途。

數學內部、生活情境、歷史、自然(或社會)科學的各種連結都很緊要，我們鼓勵教師與教科書編者能在這方面多著墨。

### 附錄三 度量衡列表

本綱要所使用各量的常用單位，係依據經濟部標準檢驗局於中華民國 92 年 6 月 13 日，經標字第 09204608060 號公告修正之「法定度量衡單位及其所用之倍數、分數之名稱、定義及代號」。

類別	單位	說明
長度	公尺(m，又稱米) 公分(cm，厘米之俗稱) 公里(km，千米之俗稱) 毫米(mm)	1 公里=1000 公尺 1 公尺=100 公分 1 公分=10 毫米
重量	公斤(kg，又稱千克) 公克(g，簡稱克) 公噸(t)	1 公噸=1000 公斤 1 公斤=1000 公克
容量	公升(l 或 L) 毫公升(ml，cc，簡稱毫升)	1 公升=1000 毫公升
角度	度	一圓周為 360 度
面積	平方公尺(m <sup>2</sup> ) 平方公分(cm <sup>2</sup> ) 平方公里(km <sup>2</sup> ) 公畝 公頃	1 公頃=100 公畝 1 公畝=100 平方公尺 1 平方公里=10 <sup>6</sup> 平方公尺 1 平方公尺=10 <sup>4</sup> 平方公分
體積	立方公尺(m <sup>3</sup> ) 立方公分(cm <sup>3</sup> )	1 立方公尺=10 <sup>6</sup> 立方公分 1 立方公尺=1000 公升
時間	日(d) 時(h) 分(min) 秒(s)	1 日=24 時 1 時=60 分 1 分=60 秒

## 附錄四標準用詞與解釋

### 1.標準用詞表

本表詳列一至九年級之數學標準用詞，其中年級為該名詞必須出現之最晚時間，除非綱要詮釋另有規定，否則教師或教科書編者也可以斟酌提前使用。

年級	數與量		幾何	代數	統計與機率
	數與計算	量與實測			
一年級	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 1、2、3、4、5、6、7、8、9、0</li> <li>• 個位、十位</li> <li>• +、加號、加法、被加數、加數、和</li> <li>• -、減號、減法、被減數、減數、差</li> <li>• =、等號、等於</li> <li>• 橫式、直式</li> <li>• 幾個一數</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 上午、中午、下午、昨天、今天、明天</li> <li>• 幾月幾日星期幾、幾點鐘、幾點半</li> <li>• 長、短</li> <li>• 直線</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 三角形、正方形、長方形、圓形</li> </ul>		
二年級	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 百位</li> <li>• &lt;、小於、&gt;、大於</li> <li>• ×、乘號、乘法、被乘數、乘數、積、倍</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 年、月、日、星期、時、分</li> <li>• 幾時幾分</li> <li>• 長度、公分、公尺、(直)尺</li> <li>• 輕、重</li> <li>• 容量</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 正方體、長方體</li> <li>• 頂點、角、邊、平面</li> <li>• 邊長、正三角形</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 驗算</li> </ul>	

年級	數與量		幾何	代數	統計與機率
	數與計算	量與實測			
三年級	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 千位</li> <li>• ÷、除號、除法、被除數、除數、商、餘數、整除</li> <li>• 偶數(雙數)、奇數(單數)</li> <li>• 分數、分母、分子、幾分之幾</li> <li>• 小數、小數點、十分位</li> <li>• 數線</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 秒</li> <li>• 毫米</li> <li>• 公升、毫公升(毫升)</li> <li>• 重量、公斤、公克</li> <li>• 面積、平方公分</li> <li>• 角</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 內部、外部、周界、周長</li> <li>• 直角</li> <li>• 圓心、圓周、半徑、直徑</li> </ul>		
四年級	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 萬、億、兆</li> <li>• 概數、四捨五入</li> <li>• 真分數、假分數、帶分數、等值分數</li> <li>• 百分位</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 公里</li> <li>• 角度、度</li> <li>• 平方公尺</li> <li>• 體積、立方公分</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 垂直、平行</li> <li>• 平角、周角</li> <li>• 順時針、逆時針</li> <li>• 等腰三角形、直角三角形、平行四邊形、梯形</li> <li>• 銳角、鈍角、銳角三角形、鈍角三角形</li> <li>• 頂角、底角、腰</li> <li>• 對邊、鄰邊、對角(四邊形)</li> <li>• 全等</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 括號</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 長條圖、折線圖</li> </ul>

年級	數與量		幾何	代數	統計與機率
	數與計算	量與實測			
五年級	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 平均</li> <li>• 因數、倍數、公因數、公倍數、最大公因數、最小公倍數</li> <li>• 約分、擴分、通分</li> <li>• 比率、%、百分率、幾折</li> <li>• 千分位</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 公噸</li> <li>• 公畝、公頃、平方公里</li> <li>• 立方公尺</li> <li>• 容積</li> <li>• 高(長方體、三角形等)、底、上底、下底</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 圓心角、扇形</li> <li>• 線對稱</li> <li>• 球、正四面體、直圓柱、直圓錐、直角柱、正角錐</li> </ul>		
六年級	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 質數、合數、質因數、互質、短除法</li> <li>• 最簡分數</li> <li>• 比、比值、正比</li> <li>• 小數點以下第幾位</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 圓周率</li> <li>• 底面積</li> <li>• 速度、距離、時間</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 放大、縮小、比例尺</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• 圓形圖</li> </ul>

年級	數與量		幾何	代數	統計與機率
	數與計算	量與實測			
七年級	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 負數、整數、自然數(正整數)、絕對值</li> <li>• 底數、指數、指數律、科學記號(表示法)</li> <li>• 平方、立方</li> <li>• 反比、比例式、連比、連比例</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• 坐標、數線、數對、直角坐標、坐標平面、x 軸、y 軸、象限</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 加法交換律、乘法交換律、加法結合律、乘法結合律、(乘法對加法之)分配律</li> <li>• 大於等於、小於等於</li> <li>• 一元一次式、一元一次方程式、二元一次式、二元一次方程式、二元一次聯立方程式、解</li> <li>• 一元一次不等式、解的範圍、(以不等式表示)數的範圍</li> <li>• 函數、常數函數、一次函數、線型函數、函數圖形</li> <li>• 等量公理、移項法則、代入消去法、加減消去法</li> </ul>	

年級	數與量		幾何	代數	統計與機率
	數與計算	量與實測			
八年級	<ul style="list-style-type: none"> <li>平方根(二次方根)</li> <li>十分逼近法、近似值</li> <li>根式的化簡</li> <li>數列、公差、首項、第 <math>n</math> 項、等差數列、等差中項、等差級數和</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>尺規作圖</li> <li>線段、中點、垂足、垂直平分線(中垂線)、角平分線</li> <li>對頂角、互補、補角、互餘、餘角</li> <li>截線、內錯角、同位角、同側內角</li> <li>斜邊、畢氏定理</li> <li>等腰直角三角形、菱形、箏形、等腰梯形、正多邊形</li> <li>外角、內角、對角線</li> <li>對應點、對應邊、對應角</li> <li>對稱軸、對稱點、對稱線、對稱角(線對稱)</li> <li>弦、弧、弓形</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>乘法公式、和平方、差平方、平方和、平方差</li> <li>多項式、次數、項數、係數、常數項、最高次項</li> <li>分離係數法</li> <li>因式、倍式、公因式、因式分解</li> <li>一元二次式、一元二次方程式、根、重根</li> <li>十字交乘法、配方法、判別式、公式解</li> </ul>	

年級	數與量		幾何	代數	統計與機率
	數與計算	量與實測			
九年級			<ul style="list-style-type: none"> <li>• 縮放、相似形、比例線段</li> <li>• 弦心距、切線、切點、割線</li> <li>• 連心線、連心距、公切線</li> <li>• 圓周角、弦切角</li> <li>• 外接圓、內切圓、內接多邊形、外切多邊形</li> <li>• 外心、內心、中線、重心</li> <li>• 表面積、側面積</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 二次函數</li> <li>• 最大值、最小值</li> <li>• 拋物線、最高點、最低點、對稱軸</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 次數、相對次數、累積次數、相對累積次數、次數圖、直方圖</li> <li>• 平均數、中位數、眾數、四分位數、百分位數</li> <li>• 全距、四分位數、盒狀圖</li> <li>• 機率</li> </ul>

## 2.標準名詞解釋

### 數與量

等號	兩運算式(數)之值相等，可以‘=’記之，唸為【等於】，如 $4+3=7$ 。
大於、小於	甲大於4，可以記為 甲 $>$ 4，或 $4<$ 甲，前者唸為 甲大於4，後者唸為 4小於甲。
大於等於、小於等於	甲大於4 或者可能等於4，可記為 甲 $\geq$ 4，和甲不小於4 同義。也可記為 $4\leq$ 甲，即為 4小於或等於甲。
加	$4+3=7$ ，4 為被加數，3 為加數，7 為和。
減	$4-3=1$ ，4 為被減數，3 為減數，1 為差。
乘	$4\times 3=12$ ，4 為被乘數，3 為乘數，12 為積。
除	$14\div 4=3\cdots 2$ ，14 為被除數，4 為除數，3 為商，2 為餘數。當餘數為0時，稱為整除，如 $12\div 4=3$ 。
自然數	自然數1、2、3...為人類用來數物的數，可稱為計物數，又稱正整數。
整數	正整數、0和負整數合稱為整數。
偶數	個位數為0，2，4，6，8的整數稱為偶數，又稱雙數。

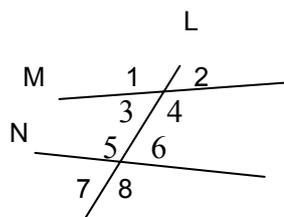
奇數	個位數為 1, 3, 5, 7, 9 的整數稱為奇數, 又稱單數。
絕對值	若 $a \geq 0$ , 則定義 $ a  = a$ , 唸為 $a$ 的絕對值等於 $a$ , 如 $ 7  = 7$ ; 若 $a < 0$ , 則定義 $ a  = -a$ , 如 $ -7  = -(-7) = 7$ 。
分數	能化為 $\frac{q}{p}$ 的型態, 且 $p, q$ 皆為整數者其中 $p \neq 0$ , 稱為分數; $p$ 稱為分母, $q$ 稱為分子; 若 $0 < q < p$ 時, $\frac{q}{p}$ 稱為真分數; 否則, $\frac{q}{p}$ 稱為假分數; 形如 $2\frac{1}{3}$ 的分數, 則稱為帶分數。
最簡分數	一分數經化簡後(合併符號、約分), 若分子與分母的絕對值互質, 此分數稱為最簡分數。
等值分數	一分數分子、分母同乘一整數, 所得的分數稱為原分數的擴分; 一分數分子、分母同除一公因數, 所得的分數稱為原分數之約分; 一分數擴分或約分後所得的分數, 其值和原分數相同, 稱為等值分數。
因數、倍數	一正整數 $a$ 若能整除另一正整數 $b$ , $a$ 稱為 $b$ 的因數, $b$ 稱為 $a$ 的倍數。
公因數、最大公因數	一正整數 $a$ 同為兩個以上正整數的因數時, 則 $a$ 為這些數的公因數。在所有公因數中最大者稱為最大公因數。
公倍數、最小公倍數	一正整數 $a$ 同為兩個以上正整數的倍數時, 則 $a$ 稱為這些數的公倍數。在所有公倍數中最小者稱為最小公倍數。
質數	一大於 1 的正整數只有 1 及本身兩個因數時, 稱為質數。
合數	又稱合成數, 大於 1 的正整數中不是質數者稱之。
互質	兩正整數若除了 1 以外無其他公因數, 則稱此兩數互質。
質因數	某數的因數如果也是質數, 稱為該數的質因數。
短除法	判別一數或一數以上的因數時只寫出除數和商, 並不詳細運算除法過程, 如

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 12} \\ \underline{2} \phantom{0} \\ 6 \\ 2 \overline{) 6} \\ \underline{2} \phantom{0} \\ 3 \end{array}$$

平方	其計算型態為短除法。若除數皆為質數, 其過程即稱為質因數分解。
平方根	一數自乘兩次, 稱為平方。如 $5 \times 5 = 25$ , 25 稱為 5 的平方。 $a^2 = b, b \geq 0$ , 則 $a$ 為 $b$ 的平方根(二次方根), 如 $2^2 = 4, (-2)^2 = 4$ , 2、-2 皆為 4 的平方根, 其中 2 為正平方根, -2 為負平方根, 合記為 $\pm\sqrt{b}$ 。
四捨五入	概數(近似值)的取法之一。若一數指定位數之下一位值小於 5, 則將指定位數之下的數皆記為 0(捨去); 若大於等於 5, 則在該指定位數加 1, 並將以下所有數皆記為 0(進入), 稱為四捨五入。例如: 325587

	在千位四捨五入得 326000；3.1416 在百分位四捨五入得 3.14。
十分逼近法	為估計一數值(如 $\sqrt{7}$ )，先找出此數值位於那兩連續的整數之間，並視實際需要，可在兩數的十等分點再找出連續的兩點做逼近估計，依此類推當可求出我們所想知道此數的近似值。
比	兩數量以「：」區隔並據以呈現兩量之大小關係稱為比，如：兩人體重比為 56：43，披薩個數與價錢之比為 2：600。
比值	由比的相等關係，導引出比之前項除以後項，其值不變，稱為比值，如 3:4 的比值為 $\frac{3}{4}$ 或 0.75。
百分率	將一純小數乘上 100 後附加%記號，稱為百分率，如 0.23=23%。
正比	兩變量 $x$ 及 $y$ ，若可寫成關係式 $y = kx$ ， $k$ 為常數(一固定數)，則稱 $x$ ， $y$ 成正比。
反比	兩非 0 變量 $x$ 及 $y$ ，若可寫成關係式 $xy=k$ ， $k$ 為非 0 常數，則稱 $x$ ， $y$ 成反比。
等差數列	一數列任意相鄰兩項的差(後項減前項)皆相等，稱為等差數列，其差稱為公差，第一項稱為首項，最後一項稱為末項。
等差中項	若三數成一等差數列，中間項稱為等差中項。
等差級數	將等差數列每一項以加號連接求和，稱為等差級數。
幾何	
角	共同端點的兩射線所成的角。
銳角	角度小於 90 度的角稱為銳角。
鈍角	角度大於 90 度的角稱為鈍角。
直角	角度等於 90 度的角稱為直角。
平角	180 度的角稱為平角。
周角	360 度的角稱為周角。
順時針、逆時針	順著時針轉動方向移動稱為順時針，反之稱為逆時針。
互補	兩角度數和為 180 度。
互餘	兩角度數和為 90 度。
對頂角	兩直線相交而成不相鄰的兩角。兩對頂角相等。
銳角三角形	三個內角皆為銳角的三角形。
鈍角三角形	有一個內角為鈍角的三角形。
直角三角形	有一個內角為直角的三角形。
等腰三角形	有兩邊相等的三角形。此相等的兩邊稱為腰。
頂角、底角	等腰三角形兩腰的夾角稱為頂角，另外兩角稱為底角。若頂角為直角則稱為等腰直角三角形。

畢氏定理	直角三角形斜邊平方等於兩股平方和，又稱商高定理或勾股定理。
平行四邊形	兩雙對邊互相平行的四邊形。
菱形	四邊等長的四邊形。
箏形	有兩組鄰邊相等的四邊形。
梯形	只有一組對邊(稱為上底與下底)平行的四邊形。非上底與下底的兩邊，稱為梯形的腰。
等腰梯形	兩腰等長的梯形。
矩形(長方形)	四個角均為直角的四邊形。
正方形	四個角均為直角且四邊等長的四邊形。
多邊形對角線	多邊形內一頂點和一不相鄰頂點的連線段。
多邊形內角	多邊形內由一頂點和兩夾邊所連成的角。
多邊形外角	若一內角小於 $180$ 度時，由此角一邊向頂點外側所做的角。若一內角大於 $180$ 度時，不定義外角。
垂直	兩直線交角 $90$ 度稱兩直線互相垂直。
垂足	兩垂直線的交點。
平行	平面上兩直線沒有交點，稱此兩直線互相平行。
周長	一圖形周界之長度。
尺規作圖	利用直尺(沒有刻度)、圓規繪製幾何圖形稱為尺規作圖。
中點	線段上一點到兩端點等距離，稱該點為此線段的中點。
垂直平分線	過一線段中點且垂直的線稱為此線段的垂直平分線，又稱為中垂線。
角平分線	將一角分成兩相等角的線稱為角平分線，又稱分角線。
全等	兩圖形可完全疊合，稱兩圖形全等。相對應之點、邊、角稱為對應點、對應邊、對應角。
對稱軸	若兩圖形或一圖形對一直線對稱，則此直線稱為對稱軸，相對應之點、邊、角，則稱為對稱點、對稱邊、對稱角。
截線	在同一平面上，直線 $L$ 分別與直線 $M$ 、 $N$ 相交於不同兩點， $L$ 叫做 $M$ 與 $N$ 的截線。



同位角 上圖中， $\angle 1$  和  $\angle 5$ ， $\angle 2$  和  $\angle 6$ ， $\angle 3$  和  $\angle 7$ ， $\angle 4$  和  $\angle 8$  分別稱

	為同位角。
同側內角	上圖中， $\angle 3$ 和 $\angle 5$ ， $\angle 4$ 和 $\angle 6$ 分別稱為同側內角。
內錯角	上圖中， $\angle 3$ 和 $\angle 6$ ， $\angle 4$ 和 $\angle 5$ 分別稱為內錯角。
比例線段	當四個線段中，兩個線段的比等於另兩個線段的比時，此四個線段稱為比例線段。
相似	一圖形經縮放後與另一圖形全等，則稱此兩圖形相似。
三角形中線	三角形一頂點和對邊中點的相連線段。
切線	平面上一直線和一圓只有一個交點稱此線為圓的一條切線。
圓	平面上和一固定點等距離的所有點形成的圖形稱為圓。 此「固定點」稱為圓心；此「距離」稱為半徑；此「圖形」稱為圓周；圓周上兩點最長的距離稱為直徑。
弦	圓周上任兩相異點的相連線段。
弦心距	圓心到弦的距離。
公切線	同時和兩圓相切的直線。
圓周率	圓周長與直徑之比值成為圓周率，常用的近似值為 3.14。
(圓)弧	圓周的一段。
弓形	由一弦和一弧所圍的圖形。
扇形	圓的兩半徑和一弧所圍成的圖形。
圓心角	以圓心為頂點兩半徑為邊所組成的角。
圓周角	圓上一點和通過此點的兩弦所形成的角。
弦切角	由過圓上同一點的弦和切線所夾的角。
外接圓	過一多邊形所有頂點的圓，稱此圓為多邊形的外接圓。
內切圓	多邊形內部中，與各邊相切的圓，稱為多邊形的內切圓。
外心	若一多邊形有外接圓，則外接圓的圓心稱為此多邊形的外心。外心為各邊垂直平分線的交點。
內心	若一多邊形有內切圓，則內切圓的圓心稱為此多邊形的內心。內心為各角平分線的交點。
三角形重心	三角形三條中線的交點。
正四面體	四面均為正三角形的四面體，亦稱正三角錐。
正方體	六面均為正方形的正四角柱體。
長方體	六面均為方形的正四角柱體。
直圓柱	上下底為兩等圓的直柱體。
直圓錐	由一扇形和圓組合而成的圖形。

表面積	一立體圖形的所有面的面積總和。
側面積	一直柱體的表面積，扣除上下兩底面積稱為直柱體的側面積。一直錐體的表面積，扣除底面積稱為直錐體的側面積。
<b>代 數</b>	
等量公理	當等號左右兩邊相等時，於等號兩邊各加、減、乘或除以同一個數(不可同時除以 0)，等號兩邊仍會維持相等。
移項規則	在等式中，將一個數或未知數從等號的一邊移到另一邊應遵守：(1)加換成減；(2)減換成加；(3)乘換成除；(4)移換成乘等規則。 不等式的移項規則原則上相同，不過將「負」的乘數或除數，移至另一邊時，不等號必須轉向，例：若 $-3x < 6$ ，則 $x > 6 \div (-3)$ ，即 $x > -2$ 。
函數	在 A、B 兩組資料中，如果給定 A 組的一個資料，就能決定 B 組的一個資料，就稱 B 是 A 的一個函數。
線型函數	函數圖形為直線的函數，稱為線型函數，包括常數函數和一次函數。
多項式	由數和文字符號進行加法和乘法運算所構成的算式，稱為多項式。 例： $3x, x+4, \frac{1}{6}x-5, x^2+1, \dots$ 。
係數	多項式中，變數以外的部分連同其前面的加減符號合稱為係數。 例： $x^2-3x+4$ ，二次項的係數為 1，一次項的係數為 -3，零次(常數)項的係數為 4。
常數項	多項式中，不含變數的項稱為多項式的常數項。
多項式的次數	多項式中，係數不為 0 的最高次項的次數稱為多項式的次數。
一元一次式	$ax+b$ ，其中 $a, b$ 為常數， $a \neq 0$ 。
二元一次式	$ax+by+c$ ，其中 $a, b, c$ 為常數，同時 $a, b$ 不能同時為 0。
一元二次式	$ax^2+bx+c$ ，其中 $a, b, c$ 為常數， $a \neq 0$ 。
分離係數法	兩多項式的四則運算中，只寫出各項係數，待運算結束後，再將結果以多項式的形式呈現。
解	滿足方程式或不等式的數，稱為解。
判別式	一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的判別式，常以 $D=b^2-4ac$ 代表，依判別式的數值為正或負或零可以判斷根的性質。

## 統計與機率

次數	各筆或各組資料出現或發生的「次數」、「人數」等。
相對次數	各筆或各組資料出現或發生的次數除以全部次數的總和。
累積次數	有序資料中依出現或發生的秩序(如：由小至大)累加至各筆或各組的次數。
相對累積次數	有序資料中依出現或發生的秩序(如：由小至大)累加至各筆或各組的相對次數。
平均數	所有資料的總和除以總次數，即所有資料的平均值。
中位數	第 50 百分位數，通常表示比這筆或這組數大和比這筆或這組數小的資料各佔一半。
眾數	出現次數最高的一個或一組數。
四分位數	第 25、50、75 百分位數也分別被稱為第 1、第 2、第 3 四分位數，第 2 四分位數又常被稱為中位數。
百分位數	各筆或各組資料的相對位置，表示有百分之多少的資料比該筆或該組資料的數要小。
全距	資料中最大數與最小數的差。
四分位距	第 3 四分位數與第 1 四分位數的差。
機率	一個事件會發生的機會；機率常以百分率或分數來表示。
長條圖	以長條狀圖形高度或長度代表資料量的統計圖形，又稱 <b>bar chart</b> ，其中各長條間並不相連接。
折線圖	以直線連接相鄰兩資料點的圖形。
圓形圖	以圓內各扇形面積代表資料統計量的圖形，又稱 <b>pie chart</b> 。
直方圖	以長條狀圖形高度代表資料量的統計圖形，又稱 <b>histogram</b> ，其中各相鄰長條間彼此相連接。
盒狀圖	以盒狀圖形表現最大數、最小數、第 1、第 2、第 3 四分位數位置的圖形，又稱 <b>box chart</b> 其中中間方盒的資料約佔 50%。

## 附錄五 指標與細目專詞釋義

### 認識、理解、熟練、報讀

本次綱要修訂，指標以數學內涵為主體，簡明扼要為目標。因此看似與認知有關的三個名詞——「認識」、「理解」與「熟練」——其實只是描述學習可能的不同階段。「認識」強調的是觀察、個例、經驗、歸納的學習初期階段，「理解」強調的是概念形成、練習、驗證、推廣的中期階段，「熟練」則在於形式與解題程序之流暢。「認識」與「理解」在具體情境中進行，「理解」與「熟練」在抽象情境中進行。「理解」本身則在具體與抽象情境間來回練習。如果一個數學概念在一個階段或一個學年中可完成，指標以較成熟的學習階段來描述。因此如果指標只有「理解」沒有「認識」，則表示「認識」與「理解」必須在同一階段或學年度完成。「統計與機率」主題中，「報讀」是指「將統計圖表上所看到資料直接讀出來」。

### 檢查細目

國小的代數課題，通常都包含於數與量的教學中，本次綱要修訂為了強調某些比較代數面向的課題，必須出現在教學或教科書，因此設置檢查細目作為提示提醒之用。例如：學生應該熟悉乘法交換律，來協助一般之心算、筆算與驗算，因此必須在數與量教學時，熟悉此事實。檢查細目不一定要另立單元(或章節)來教學。

### 具體情境

學生在解題、理解數學概念或規律時，經常需要先有恰當的範例、應用來提示與引導，這些情境我們都稱之為具體情境(對應於「認識」與「理解」)。在小學的中低年級，具體情境有相當多部分與生活有關，因此並不與生活情境做區分。但隨著學生熟習表徵(例如：乘法的排列模型)或較抽象的思考(例如：數字感)，學生學習數學時，所依賴的具體情境，就不見得是生活情境。例如：學生在五、六年級學因數、倍數或質數課題時，最恰當的具體情境，就是學生對整數性質的熟悉，而不是日常生活的問題。又例如：六年級的等量公理，應該是基於小學六年數與量計算經驗的自然經驗總結，不應該再使用天平、砝碼之類的生活情境。

### 情境

學生在解題、理解數學概念或規律時，經常需要置身在某經驗脈絡中，讓自己過去或其他的經驗，可以用來協助學習。綱要中常用到的情境，一種泛指這些經驗的脈絡特徵，例如：生活情境、具體情境。另一種則指某核心類型的學習經驗，例如：平分情境、測量情境。